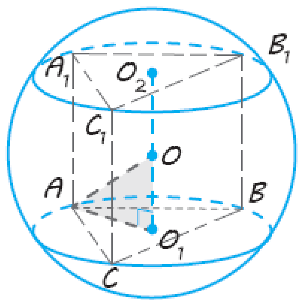
Комбінації многогранників із кулею

Таблиця

1. Куля, описана навколо призми



Куля називається *описаною навколо призми*, якщо всі вершини призми лежать на поверхні кулі.

O — центр описаної кулі,

$OA = OB = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$

Властивості

1. Кулю можна описати тільки навколо прямої призми, навколо основи якої можна описати коло.

2. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми (точка O — середина відрізка O_1O_2).

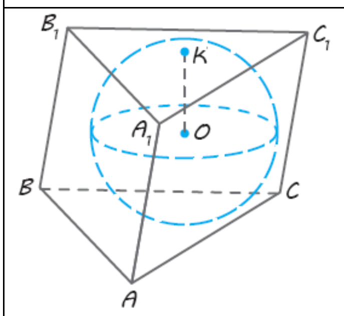
Для розв'язування зазвичай використовують прямокутний трикутник AOO_1, у якому:

$AO = R_{\text{опис. кулі}}$ — радіус описаної кулі,

$AO_1 = R_{\text{кола}}$ — радіус кола, описаного навколо основи призми,

$$OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}H_{\text{пр}}$$

2. Куля, вписана в призму



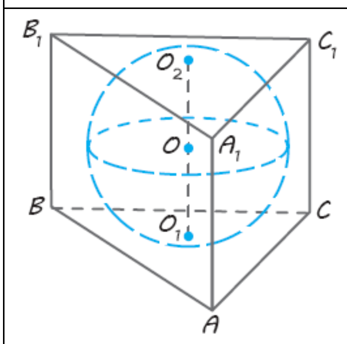
Куля називається в*писаною в призму*, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі.

O — центр вписаної кулі,

K — точка дотику з гранню $A_1B_1C_1$.

$OK = r_{\text{опис. кулі}}$ $\left(OK \perp \text{пл. } A_1B_1C_1\right)$

1. Пряма призма

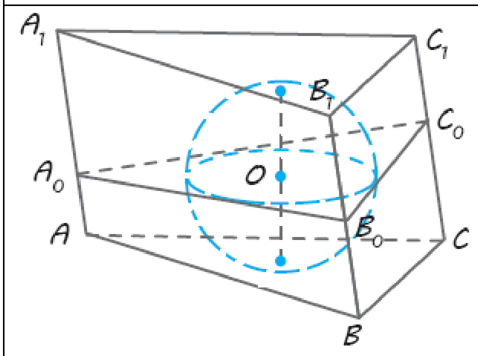


Центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі — висоті призми.

Якщо $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма й O_1 — центр кола, вписаного в основу ABC, O_2 — центр кола, вписаного в основу $A_1B_1C_1$, O — середина відрізка O_1O_2, то O — центр вписаної кулі, $r_{\text{впис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. в осн}}$,

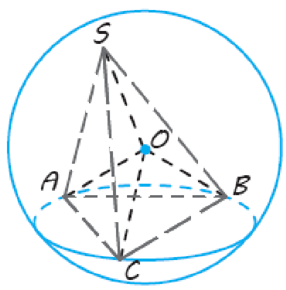
$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{пр}}$

2. Похила призма



Якщо в похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.
Якщо в призму $ABCA_1B_1C_1$ вписано кулю
і $A_0B_0C_0$ — перпендикулярний
переріз (пл. $A_0B_0C_0 \perp AA_1$),
то $r_{\text{опис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. у перп. пер. } A_0B_0C_0}$,
$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{пр}}$

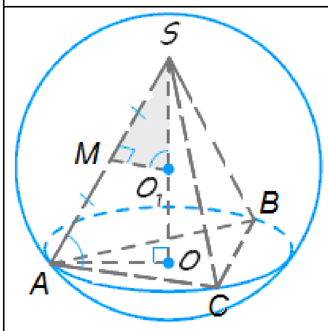
3. Куля, описана навколо піраміди



Куля називається *описаною навколо піраміди*, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.
O — центр описаної кулі,
$OA = OB = OC = SO = R_{\text{опис. кулі}}$

1. Піраміда, основою висоти якої є центр описаного навколо основи кола

У такій піраміді центр описаної кулі лежить на прямій, що містить висоту піраміди, у точці перетину цієї прямої із серединним перпендикуляром до бічного ребра.

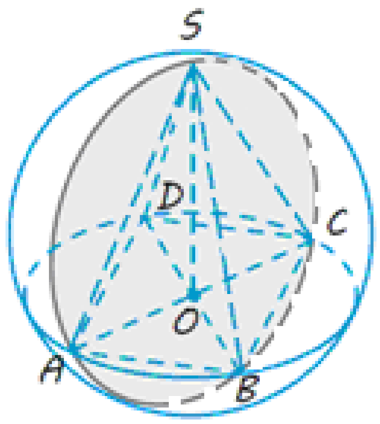
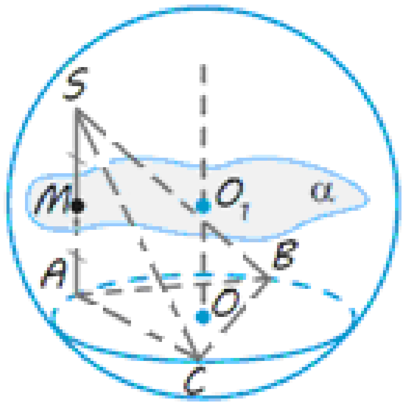
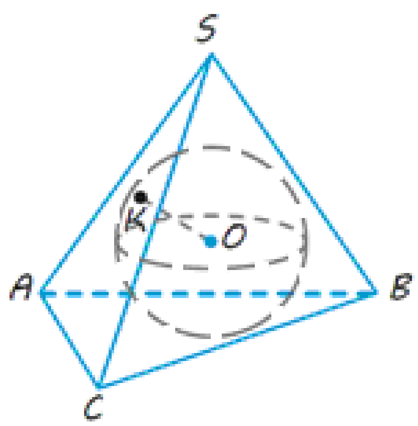


SO — висота піраміди $SABC$,
O — центр кола, описаного навколо основи піраміди,
M — середина ребра SA,
$MO_1 \perp SA$ (у площині ASO),
MO_1 перетинає пряму SO у точці O_1,
O_1 — центр описаної кулі,
$SO_1 = R_{\text{опис. кулі}}$,
$AO = R_{\text{кола, опис. навк. осн}}$

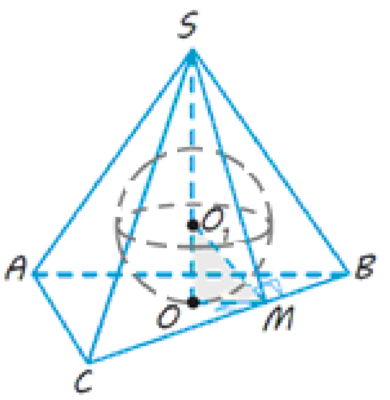
Шляхи розв'язування:

1) Ураховуючи, що $\angle SO_1M = \angle SAO$, обчислюємо елементи прямокутних трикутників SAO і SMO_1... .

2) Ураховуючи, що $\triangle SMO_1 \sim \triangle SOA$, записуємо відповідні пропорції...

<table>
<tr><td colspan="2">2. Куля, описана навколо правильної піраміди</td></tr>
<tr><td>
</td><td>1. Навколо будь-якої правильної піраміди можна описати кулю (сферу).
Центр кулі (сфери), описаної навколо правильної піраміди, лежить на осі піраміди.
2. Радіус кулі (сфери), описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, дорівнює радіусу кола, описаного навколо діагонального перерізу піраміди, (діагональний переріз — це переріз піраміди, що проходить через вершину піраміди і діагональ основи).</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Довільна піраміда</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Центр кулі, описаної навколо довільної піраміди (навколо основи якої можна описати коло), лежить на прямій, перпендикулярній до площини основи, що проходить через центр кола, описаного навколо основи, у точці перетину цієї прямої з площиною, яка перпендикулярна до бічного ребра і проходить через його середину.
O — центр кола, описаного навколо основи:
$OO_1 \perp$ пл. ABC,
M — середина ребра SA $\alpha \perp SA$ $(M \in \alpha)$,
α перетинає OO_1 у точці O_1,
O_1 — центр описаної кулі</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Куля, вписана в піраміду</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Куля називається вписаною в піраміду, якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі.
O — центр вписаної кулі,
K — точка дотику до грані SAC,
$OK = r_{\text{впис. кулі}}$ $(OK \perp \text{пл. } SAC)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Піраміда, основа висоти якої — центр вписаного в основу кола</td></tr>
<tr><td colspan="2">У такої піраміди центр вписаної кулі лежить на висоті піраміди, у точці перетину висоти з бісектрисою лінійного кута двогранного кута при основі.</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td>

SO — висота піраміди $SABC$ (O — центр кола, вписаного в основу),
$\angle SMO$ — лінійний ($OM \perp BC$, $SM \perp BC$),
MO_1 — бісектриса кута SMO,
MO_1 перетинає SO в точці O_1,
O_1 — центр вписаної кулі,
$OO_1 = r_{\text{впис. кулі}}$,
$OM = r_{\text{кола, впис. в осн}}$

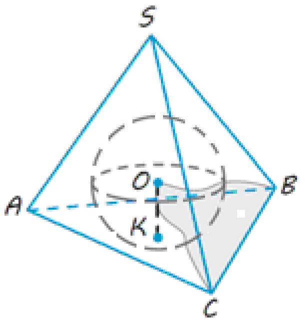
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Шляхи розв'язування:
1) $\angle OMO_1 = \frac{1}{2}\angle SMO$. Розглядаємо прямокутні трикутники OMO_1 і SOM...;
2) оскільки MO_1 — бісектриса $\triangle SMO$, то $\frac{SO_1}{OO_1} = \frac{SM}{OM}$ ...;
3) $r_{\text{впис. кулі}} = \frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\text{повн. пір}}}$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

2. Довільна піраміда

</td>
</tr>
<tr>
<td>



$r_{\text{впис. кулі}} = \frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\text{повн. пір}}}$

</td>
<td>

Центр кулі, вписаної в довільну трикутну піраміду, лежить у точці перетину бісекторних площин двогранних кутів при ребрах піраміди.
Достатньо розглянути три бісекторні площини.
O — центр вписаної кулі, пл. BCO — бісекторна площина двогранного кута при ребрі BC,
$OK \perp$ пл. ABC, $OK = r_{\text{впис. кулі}}$

</td>
</tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Вписані й описані многогранники. Куля, описана навколо призми

Означення. Многогранник називається *вписаним у кулю*, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі (а куля називається *описаною навколо многогранника*).

Означення. Многогранник називається *описаним навколо кулі*, якщо всі його грані дотикаються до поверхні кулі (а куля називається *вписаною у многогранник*).

Розглянемо більш детально розташування центра кулі, описаної навколо призми (за означенням усі вершини такої призми лежать на поверхні описаної кулі).

● Нехай кулю описано навколо призми $ABCA_1B_1C_1$ і точка O — центр кулі (рис. 1). Розглянемо переріз кулі площинами нижньої й верхньої основ. У перерізі одержуємо круги, описані навколо основ. Оскільки основи призми рівні, то й круги перерізів будуть рівні, а отже, розташовуватимуться на однаковій відстані від центра. Проведемо з центра кулі перпендикуляр $OO_1 \perp$ пл. ABC, тоді за теоремою 9.1 точка O_1 — центр круга перерізу кулі площиною ABC. Продовжимо відрізок O_1O до перетину з площиною $A_1B_1C_1$ у точці O_2. Основи призми паралельні, тоді пряма O_1O_2, перпендикулярна до однієї з них, буде перпендикулярна й іншій, тобто $OO_2 \perp$ пл. $A_1B_1C_1$. Маємо, що точка O_2 — центр круга перерізу кулі площиною $A_1B_1C_1$, а відрізки OO_1 й OO_2 — рівні відстані від центра кулі до кругів перерізів. За означенням верхня і нижня основи призми суміщаються паралельним перенесенням на вектор A_1A. Але при цьому суміщаються і центри O_2 та O_1 кіл, описаних навколо основ призми. Тоді $A_1A \parallel O_2O_1$ і $O_2O_1 \perp$ пл. ABC, тому $A_1A \perp$ пл. ABC, тобто призма пряма. ○

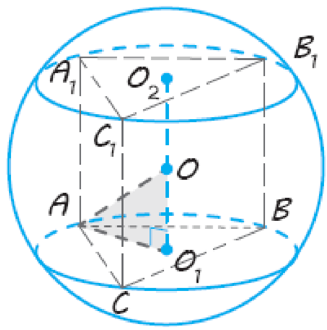


Рис. 1

Отже, кулю можна описати тільки навколо прямої призми, навколо основи якої можна описати коло. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

Зазначимо, що обґрунтування розташування центра кулі, описаної навколо призми, було наведено для трикутної призми, але воно є правильним і для будь-якої прямої призми, навколо основи якої можна описати коло. Також зазначимо, що для розв'язування задач на обчислення, пов'язаних із кулею, описаною навколо прямої призми, зазвичай доводиться розглядати прямокутний трикутник AOO_1, виокремлений кольором на рис. 1, у якому $AO = R_{\text{кулі}}$, AO_1 — радіус кола, описаного навколо основи призми, і $OO_1 = \frac{1}{2}A_1A$.

2. Куля, вписана в призму

Як і для будь-якого многогранника, куля називається вписаною в призму, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі.

● Нехай кулю вписано в призму $ABCA_1B_1C_1$ і точка O — центр кулі (рис. 2). Якщо M — точка дотику кулі з гранню ABB_1A_1, то за теоремою 9.2 радіус $OM \perp$ пл. ABB_1A_1. Але тоді $OM \perp AA_1$.

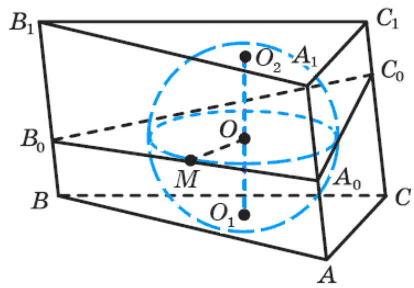


Рис. 2

Проведемо через точку M у грані ABB_1A_1 пряму $A_0B_0 \perp AA_1$ і розглянемо переріз призми і кулі площиною, що проходить через прямі A_0B_0 і OM, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої й площини площина отриманого перерізу $A_0B_0C_0$ перпендикулярна до ребра AA_1, тоді отриманий переріз $A_0B_0C_0$ перпендикулярний до всіх бічних ребер. Його називають перпендикулярним перерізом призми. Також за ознакою перпендикулярності площин перпендикулярний переріз буде перпендикулярним до кожної бічної грані призми. Тому всі точки дотику сфери з бічними гранями (як основи перпендикулярів, опущених із центра кулі на дотичні площини) лежатимуть у площині $A_0B_0C_0$. Переріз кулі цією площиною буде великим кругом, вписаним у трикутник $A_0B_0C_0$.

Сполучимо центр кулі з точкою O_1 — точкою дотику кулі з основою ABC призми. Тоді $OO_1 \perp$ пл. ABC. Продовжимо відрізок O_1O до перетину з площиною $A_1B_1C_1$ у точці O_2. Основи призми паралельні, тоді пряма O_1O_2, перпендикулярна до однієї з них, буде перпендикулярна й до іншої, тобто $OO_2 \perp$ пл. $A_1B_1C_1$. Оскільки з точки O можна провести тільки один перпендикуляр на площину $A_1B_1C_1$, то O_2 — точка дотику кулі з площиною $A_1B_1C_1$ і відрізок O_1O_2 — діаметр кулі $\left(O_1O_2 \perp \text{пл. } ABC\right)$. ○

Отже, *якщо в похилу призму вписано кулю, то радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в перпендикулярний переріз призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми*.

Якщо врахувати, що в прямій призмі перпендикулярний переріз призми дорівнює її основам (рис. 3), то *центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить у середині відрізка, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі — висоті призми.*

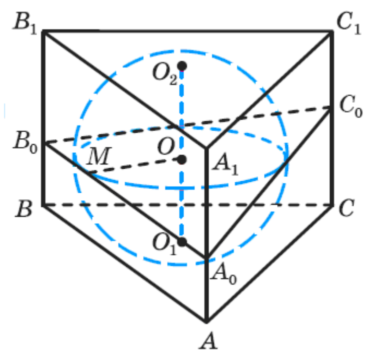


Рис. 3

3. Куля, описана навколо піраміди

Означення. Як і для будь-якого многогранника, куля називається *описаною навколо піраміди*, якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.

● Розглянемо переріз кулі площиною основи піраміди. У перерізі дістанемо круг, описаний навколо основи піраміди, оскільки всі вершини основи лежать на поверхні кулі (круг, описаний навколо трикутника ABC, у пірамідах $SABC$ на рис. 4 і 5). Якщо із центра кулі — точки O_1 провести перпендикуляр O_1O на січну площину, то його основа — точка O буде центром круга перерізу, тобто центром кола, описаного навколо основи піраміди.

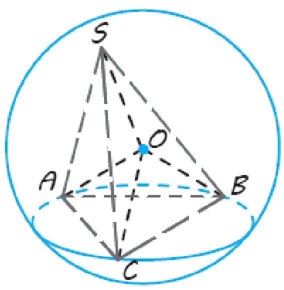


Рис. 4

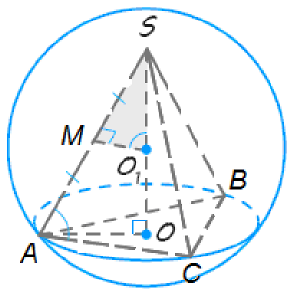


Рис. 5

Отже, *центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, (навколо основи якої можна описати коло) лежить на прямій, яка перпендикулярна до площини її основи і проходить через центр кола, описаного навколо основи піраміди.*

Можливі два випадки розташування вершини піраміди S відносно прямої OO_1.

1. Вершина S (протилежна основі піраміди) лежить на прямій OO_1 (рис. 5). Це буде в тому випадку, коли основою висоти піраміди є центр описаного навколо основи піраміди кола (оскільки через точку O можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до площини основи). Тоді бічне ребро піраміди (наприклад, SA) лежатиме в одній площині з висотою SO піраміди. У цій площині центр кулі — точка O_1 (лежить на прямій SO) рівновіддалена від кінців відрізка SA ($SO_1 = AO_1$ як радіуси кулі) і тому лежить на серединному перпендикулярі до ребра SA.

2. Вершина S може не лежати на прямій OO_1. Але і в цьому випадку центр кулі — точка O_1 (лежить на прямій OO_1) рівновіддалена від кінців відрізка SA ($SO_1 = AO_1$ як радіуси кулі) і тому лежить у площині, яка перпендикулярна до ребра SA і проходить через його середину. ○

Отже, ми обґрунтували твердження, викладені в пункті 3 таблиці, а саме:

1. *Якщо в піраміді основою висоти є центр кола, описаного навколо основи, то центр описаної навколо піраміди кулі лежить на прямій, що містить висоту піраміди, у точці перетину цієї прямої із серединним перпендикуляром до бічного ребра* (рис. 5).

2. *Центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, лежить на прямій, перпендикулярній до площини основи, що проходить через центр кола, описаного навколо*

основи, у точці перетину цієї прямої з площиною, яка перпендикулярна бічному ребру і проходить через його середину (рис. 6).

Зазначимо, що якщо в піраміді основою висоти є центр кола, описаного навколо основи, то центр описаної кулі може розташовуватися на висоті піраміди (рис. 5), або на продовженні висоти (рис. 7), або збігатися з основою висоти піраміди (рис. 8).

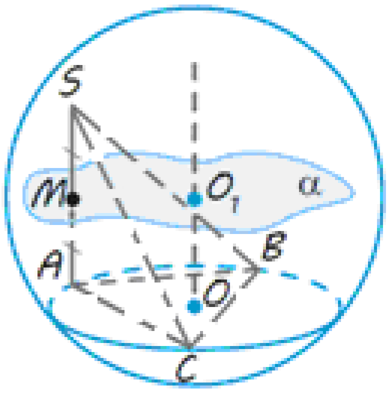


Рис. 6

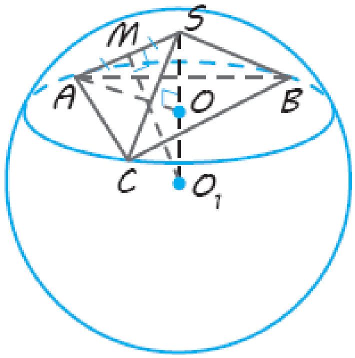


Рис. 7

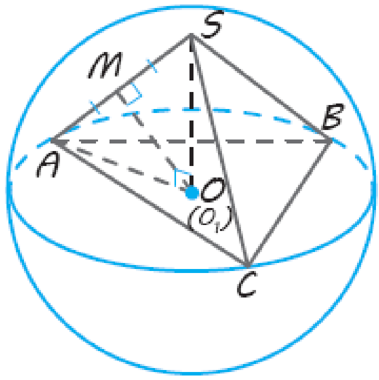


Рис. 8

Також зазначимо, що в правильній піраміді основою висоти є центр основи, який у правильному многокутнику є і центром кола, описаного навколо основи, тому *центр описаної навколо правильної піраміди кулі лежатиме на прямій, що містить висоту піраміди, тобто на осі правильної піраміди.*

У випадку правильної чотирикутної піраміди зазвичай буває зручно розглянути діагональний переріз піраміди, тобто переріз піраміди, що проходить через вершину піраміди і діагональ основи. Оскільки цей переріз проходить через центр кулі, то в перерізі одержимо великий круг, описаний навколо діагонального перерізу (рис. 9). Маємо, що *радіус кулі (сфери), описаної навколо правильної чотирикутної піраміди, дорівнює радіусу кола, описаного навколо діагонального перерізу піраміди*.

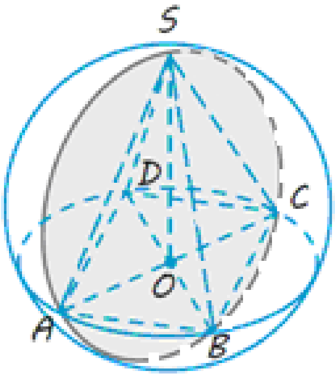


Рис. 9

4. Куля, вписана в піраміду

Як і для будь-якого многогранника, куля називається вписаною в піраміду, якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі.

Якщо кожна грань піраміди є дотичною до кулі, то всі відстані від центра кулі до граней дорівнюють радіусу кулі (оскільки радіус, проведений у точку дотику, перпендикулярний до відповідної до грані). Тоді центр кулі рівновіддалений від граней усіх двогранних кутів при ребрах піраміди. Ураховуючи, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються, є бісекторні площини утворених двогранних кутів, одержуємо, що центр кулі, вписаної в довільну трикутну піраміду, розташований у точці перетину бісекторних площин двогранних кутів при ребрах піраміди[1]. У трикутній піраміді ці бісекторні площини завжди перетинаються в одній точці (рис. 10).

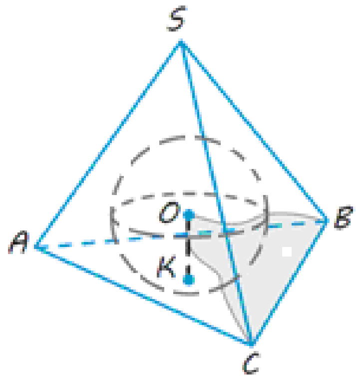


Рис. 10

Для піраміди, основою висоти якої є центр кола, вписаного в основу, можна вказати більш зручний орієнтир для визначення центра вписаної кулі, а саме: *якщо основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу, то центр вписаної кулі лежить на висоті піраміди в точці перетину висоти з бісектрисою лінійного кута двогранного кута при основі піраміди.*

● Нехай у піраміді $SABC$ основою висоти SO є точка O — центр вписаного в основу кола (рис. 11), а M і N — точки дотику кола, вписаного в основу піраміди, зі сторонами BC і AC відповідно. Тоді $OM \perp BC$ і за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$, отже, $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC. Аналогічно, $\angle SNO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі AC $\left(\angle SNO = \angle SMO\right)$.

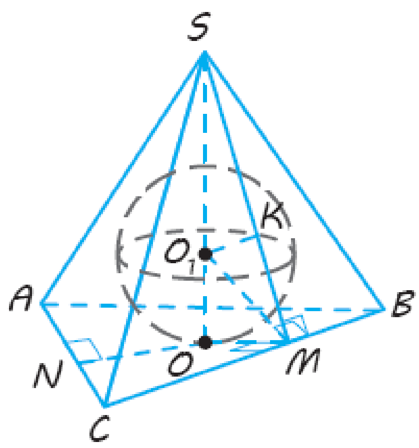


Рис. 11

[1] Зазначимо, що в піраміду можна вписати кулю тоді й тільки тоді, коли всі бісекторні площини внутрішніх двогранних кутів піраміди перетинаються в одній точці.

Проведемо бісектрису MO_1 лінійного кута *SMO* і позначимо через O_1 точку перетину бісектриси з висотою *SO* піраміди. Упишемо в кут *SMO* півколо з центром у точці O_1 і радіуса O_1O так, як показано на рис. 11 ($O_1K \perp SM$, $O_1O = O_1K$). Обертатимемо півколо навколо прямої *SO*. Одержимо кулю. Доведемо, що ця куля вписана в задану піраміду.

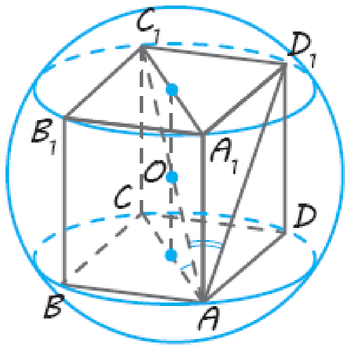
Оскільки O_1O — радіус кулі й $O_1O \perp \text{пл.}\, ABC$ (O_1O — частина висоти *SO* піраміди), то площина *ABC* є дотичною до побудованої кулі. Ураховуючи, що площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані цього кута, маємо, що $\text{пл.}\, SMO \perp \text{пл.}\, SBC$. Але радіус $O_1K \perp SM$, тоді $O_1K \perp \text{пл.}\, SBC$, отже, площина *SBC* — дотична до побудованої кулі. Ці міркування можна повторити щодо будь-якої бічної грані піраміди. Для цього достатньо врахувати, що, наприклад, $\triangle SON = \triangle SOM$ і повернути трикутник *SOM* навколо осі *SO* так, щоб він сумістився з трикутником *SON*.

Тоді всі грані піраміди будуть дотичними до кулі, і, за означенням, куля буде вписана в піраміду. ○

Приклади розв'язування задач

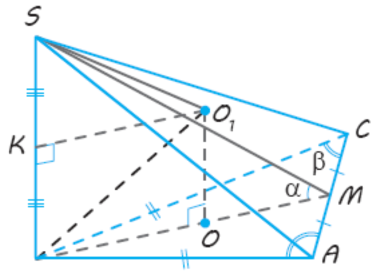
Задача 1. У кулю радіуса *R* вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з площиною основи та з однією з бічних граней кути 30°. Знайдіть виміри паралелепіпеда.

Розв'язання	Коментар
► Оскільки всі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні, перетинаються в одній точці й точкою перетину (точкою *O*) діляться навпіл, то точка *O* рівновіддалена від усіх вершин цього прямокутного паралелепіпеда, тобто є центром описаної кулі, а кожна діагональ прямокутного паралелепіпеда є діаметром цієї кулі, наприклад $AC_1 = 2R$ (рис. 12). У прямокутному паралелепіпеді $C_1D_1 \perp \text{пл.}\, ADD_1A_1$, тоді $\angle C_1AD_1$ — кут нахилу діагоналі C_1A до площини ADD_1A_1 і $\angle C_1AD_1 = 30°$. Аналогічно $C_1C \perp \text{пл.}\, ABCD$, тоді $\angle C_1AC$ — кут нахилу діагоналі C_1A до площини *ABCD* і $\angle C_1AC = 30°$.	За умовою задачі паралелепіпед вписаний у кулю, отже, куля описана навколо паралелепіпеда. Для розв'язування цієї задачі можна пригадати, що прямокутний паралелепіпед є прямою призмою і розташування центра описаної кулі, зазначене в пункті 1 таблиці. Однак простіше врахувати, що в прямокутному паралелепіпеді точка перетину його діагоналей рівновіддалена від усіх його вершин, тобто є центром описаної навколо нього кулі. Для обґрунтування кута між діагоналлю паралелепіпеда і відповідною площиною слід урахувати, що в прямокутному паралелепіпеді $C_1C \perp \text{пл.}\, ABCD$ і $C_1D_1 \perp ADD_1A_1$. Тоді *AC* — проекція

Із прямокутного трикутника ACC_1 маємо: $CC_1 = AC_1 \cdot \sin 30° = 2R \cdot \frac{1}{2} = R$, $AC = AC_1 \cdot \cos 30° = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Аналогічно з прямокутного трикутника AC_1D_1 маємо: $C_1D_1 = R$. Із прямокутного трикутника ACD $\left(CD = C_1D_1 = R\right)$ маємо: $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 - R^2} = R\sqrt{2}$. Тоді виміри заданого прямокутного паралелепіпеда дорівнюють $R\sqrt{2}$; *R*; *R*. ◁	відрізка AC_1 на площину *ABCD* і AD_1 — проекція відрізка AC_1 на площину ADD_1A_1. Далі враховуємо, що кут між похилою й площиною — це кут між похилою та її проекцією на цю площину.  Рис. 12

Зауваження. Із розв'язання цієї задачі маємо, що *центр кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, лежить у точці перетину його діагоналей, а кожна діагональ прямокутного паралелепіпеда є діаметром описаної кулі*.

Задача 2. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник із кутом β при основі трикутника. Дві рівні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини її основи, а третя бічна грань утворює з основою кут α. Знайдіть висоту піраміди, якщо радіус описаної навколо піраміди кулі дорівнює *R*.

Розв'язання	**Коментар**
► 1. Нехай у піраміді *SABC* $AB = BC$, $\angle ACB = \beta$, **пл.** $SAB \perp$ **пл.** ABC і **пл.** $SBC \perp$ **пл.** ABC (рис. 13). Тоді *SB* — висота піраміди $\left(SB \perp \text{пл. } ABC\right)$. 2. Проведемо $BM \perp AC$, тоді $SM \perp AC$ за теоремою про три перпендикуляри, отже, $\angle SMB$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі *AC* і $\angle SMB = \alpha$. 3. Нехай точка *O* — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника *ABC* (він лежить на прямій *BM*, оскільки *BM* — висота і медіана трикутника, а отже, і серединний перпендикуляр до сторони *AC*). Тоді центр O_1 описаної кулі лежить на прямій OO_1, перпендикулярній до площини	1. Для обґрунтування розташування висоти піраміди враховуємо: якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є їхнє спільне бічне ребро (див. § 5). Це необхідно врахувати вже під час побудови рисунка (рис. 13). У цьому випадку рівні бічні грані міститимуть рівні сторони рівнобедреного трикутника, що лежить в основі піраміди ($\triangle SAB = \triangle SCB$ за двома катетами).  Рис. 13

ABC. Також $SB \perp$ пл. ABC, отже, $OO_1 \parallel SB$. Паралельні прямі лежать в одній площині, і в цій площині точка O_1 рівновіддалена від точок S і B $(SO_1 = BO_1 = R)$. Отже, точка O_1 розташована на серединному перпендикулярі KO_1 до ребра SB. (Зазначимо, що тоді OO_1KB — прямокутник і $OO_1 = BK = \frac{1}{2}SB$.) 4. Позначимо $SB = x$ (де $x > 0$). Тоді $OO_1 = BK = \frac{1}{2}SB = \frac{x}{2}$. Із прямокутного трикутника SMB: $BM = SB\,\mathrm{ctg}\,\alpha = x\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Із прямокутного трикутника BMC маємо: $BC = \frac{BM}{\sin\beta} = \frac{x\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{\sin\beta}$. Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC: $BO = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{x\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2\sin^2\beta}$. Із прямокутного трикутника BOO_1 маємо: $OO_1^2 + BO^2 = O_1B^2$. Тоді $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2\,\mathrm{ctg}^2\,\alpha}{4\sin^4\beta} = R^2$. Звідси $x^2\left(\sin^4\beta + \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right) = 4R^2\sin^4\beta$. Маємо: $x = \frac{2R\sin^2\beta}{\sqrt{\sin^4\beta + \mathrm{ctg}^2\,\alpha}}$ — висота піраміди. ◁	2. Для побудови лінійного кута двогранного кута при ребрі AC достатньо в площині основи з основи висоти провести перпендикуляр BM до цього ребра, сполучити отриману точку M із вершиною піраміди S і скористатися теоремою про три перпендикуляри. 3. Для обґрунтування розташування центра описаної кулі скористаємося твердженням, що центр кулі, описаної навколо довільної піраміди, лежить на прямій, перпендикулярній до площини її основи, що проходить через центр кола, описаного навколо основи піраміди. 4. Під час виконання обчислювальної частини розв'язання слід урахувати, що заданий відрізок (радіус кулі R) і задані кути (α і β) неможливо об'єднати в зручний для розв'язування трикутник, тому корисно ввести невідомий відрізок (наприклад, довжину висоти піраміди, яку потрібно знайти). Для складання рівняння зручно використовувати прямокутний трикутник BOO_1, гіпотенуза якого відома (R), а катети нескладно виразити через x і задані кути.

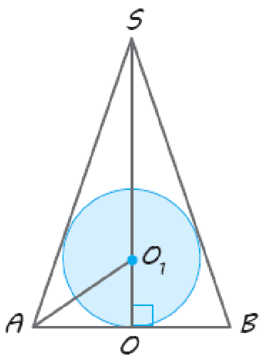
Розглянемо також приклад розв'язування задачі на комбінацію тіл обертання. Нагадаємо, що *під час розв'язування задач на комбінацію тіл обертання часто буває зручно розглянути осьовий переріз заданої комбінації* (і звести задачу до планіметричної).

Означення. ***Кулею, вписаною в конус,*** **називається куля, яка дотикається до площини основи конуса, а кожна з твірних конуса є дотичною до кулі.**

Означення. ***Кулею, вписаною в циліндр,*** **називається куля, яка дотикається до площин основ циліндра, а кожна з твірних циліндра є дотичною до кулі.**

Із міркувань симетрії одержуємо, що *центр кулі, вписаної в конус або в циліндр, розташований на їхній осі*.

Задача 3. Висота конуса дорівнює 8 см, а радіус вписаної кулі — 3 см. Знайдіть бічну поверхню конуса.

Розв'язання	**Коментар**
► Розглянемо осьовий переріз комбінації заданих тіл (рис. 14). Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений трикутник *SAB*, основа якого дорівнює діаметру основи конуса, висота *SO* — висоті конуса, а бічна сторона — твірній конуса. Осьовим перерізом кулі є круг, радіус якого дорівнює радіусу кулі. Оскільки куля вписана в конус, то круг буде вписаний у трикутник. За умовою $SO = 8$ см. Центр O_1 вписаного круга (кола) лежить у точці перетину бісектрис кутів трикутника. У рівнобедреному трикутнику *SAB* висота *SO* є одночасно бісектрисою й медіаною. Отже, точка O_1 лежить на висоті *SO* і відрізок AO_1 — бісектриса кута *A*. Тоді OO_1 — радіус вписаного кола, а отже, і радіус кулі, вписаної в конус. Звідси $OO_1 = 3$ см. Тоді $SO_1 = 5$ см. Нехай $SA = x$ $(x > 0)$. У трикутнику *SAO* відрізок AO_1 — бісектриса, тоді $\frac{OO_1}{SO_1} = \frac{AO}{SA}$, тобто $\frac{3}{5} = \frac{AO}{x}$. Звідси $AO = \frac{3}{5}x$. Із прямокутного трикутника *ASO* маємо: $SA^2 = AO^2 + SO^2$, тоді $x^2 = \frac{9}{25}x^2 + 64$. Звідси $x = 10$ (см). Одержуємо: $SA = x = 10$ см, $AO = \frac{3}{5}x = 6$ (см). Тоді бічна поверхня конуса дорівнює $\pi \cdot AO \cdot SA = \pi \cdot 6 \cdot 10 = 60\pi$ (см^2). ◁	Оскільки в задачі розглядається комбінація конуса й кулі — двох тіл обертання, то зручно розглянути осьовий переріз цієї комбінації. Приступаючи до обчислювальної частини розв'язання задачі, слід урахувати, що задані відрізки не вдається об'єднати в зручний для розв'язання трикутник, тому доцільно ввести невідомий відрізок (див. § 2 підручника для 10 класу). Зокрема, ураховуючи формулу для обчислення площі бічної поверхні конуса, одержимо: $S = \pi R l = \pi \cdot AO \cdot SA$. Зручно позначити через *x* відрізок *AO* або відрізок *SA*. Щоб скласти рівняння зі змінною *x*, можна виразити сторони *SA* і *AO* прямокутного трикутника *ASO* через *x* і скористатися теоремою Піфагора. Для одержання зв'язку між довжинами сторін *SA* і *AO* зручно врахувати, що в трикутнику *ASO* відрізок AO_1 — бісектриса, яка ділить протилежну сторону на частини, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін.  Рис. 14