Задача 3. Куля радіуса R дотикається до всіх сторін правильного трикутника зі стороною a (рис. 1). Знайдіть відстань від центра кулі до площини трикутника.

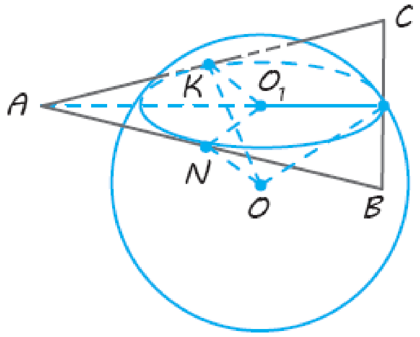

Рис. 1

Розв'язання	Коментар
► Площина трикутника перетинає кулю по кругу. Оскільки куля дотикається до всіх сторін трикутника, то точки дотику лежать у площині трикутника. Круг також дотикається до всіх сторін трикутника, тобто буде вписаним у трикутник. Проведемо перпендикуляр із центра кулі O на площину трикутника і позначимо через O_1 основу цього перпендикуляра — центр круга, отриманого в перерізі (рис. 1). Тоді OO_1 — відстань від центра кулі до площини трикутника. Якщо N — точка дотику до сторони AB трикутника з кругом перерізу, то $ON = R$ і O_1N — радіус перерізу, який дорівнює радіусу кола, вписаного в правильний трикутник зі стороною a, тобто $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Із прямокутного трикутника OO_1N маємо: $OO_1 = \sqrt{ON^2 - O_1N^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$. ◁	Оскільки куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника, то площина трикутника має з кулею більше ніж одну спільну точку, тобто площина трикутника перетинає кулю (по кругу). За умовою кожна сторона трикутника є дотичною до кулі. Тому кожна сторона має єдину спільну точку з кулею, а отже, і єдину спільну точку з кругом, що лежить у перерізі. Отже, круг, отриманий у перерізі, є вписаним у заданий правильний трикутник. Радіус круга, вписаного в правильний трикутник, можна обчислити або за формулою $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, або з прямокутного трикутника AO_1N (рис. 1), де O_1 — точка перетину висот, медіан і бісектрис правильного трикутника (тому $AN = \frac{a}{2}$, $\angle O_1AN = 30°$).

Задача 4. Дві рівні кулі радіуса R розташовані так, що центр однієї лежить на поверхні іншої (рис. 2). Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються їхні поверхні.

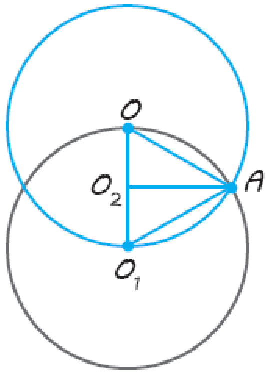

Рис. 2

Розв'язання	**Коментар**
► Проведемо переріз через центри куль (рис. 2). Лінія, про яку йде мова в задачі, є колом, а її радіус дорівнює висоті AO_2 рівностороннього трикутника OAO_1, сторони якого дорівнюють R. Висота AO_2 дорівнює $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Отже, довжина лінії перетину поверхонь куль дорівнює $\pi R\sqrt{3}$. ◁	Під час розв'язування задач на комбінацію тіл обертання часто буває зручно розглянути осьовий переріз заданої комбінації. Також слід урахувати, що лінія перетину двох сфер є колом з радіусом AO_2 (де $AO_2 \perp OO_1$). Тоді довжина шуканого кола дорівнює $2\pi AO_2$.