Властивості піраміди

Для розв'язання задач, пов'язаних із пірамідою, часто буває зручно використовувати певні **властивості** піраміди, які дозволяють уточнити розташування її висоти й урахувати його вже під час побудови рисунка до задачі. (Зазначимо, що всі запропоновані нижче доведення можуть бути проведені не тільки для трикутних пірамід, зображених на рисунках, але й для всіх n-кутних пірамід з відповідними характеристичними властивостями.)

***Властивість* 1.** Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під рівними кутами до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди (і навпаки).

● *Доведення*. Справді, нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 1). Потрібне твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOA, SOB, SOC (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гіпотенузою або за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

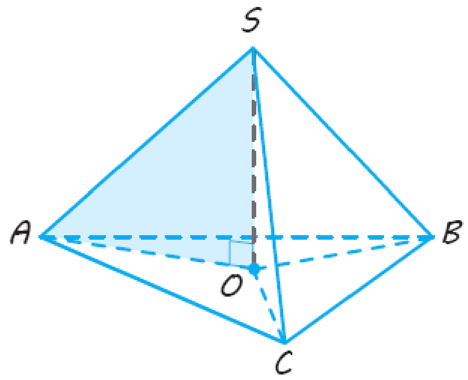


Рис. 1

Наприклад, якщо всі бічні ребра піраміди рівні: $SA = SB = SC$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OA = OB = OC$. Отже, точка O рівновіддалена від точок A, B, C і є центром кола, описаного навколо основи піраміди — трикутника ABC. (Інші прямі й обернені твердження із цієї властивості обґрунтуйте самостійно.) ○

Зазначимо, що для розв'язання задач, пов'язаних із пірамідами такого виду, зазвичай використовують прямокутний трикутник SAO, у якому $SO \perp AO$, $AO = R_{\text{оп}}$ (радіус кола, описаного навколо основи піраміди), $\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи (оскільки $SO \perp \text{пл.}\ ABC$, то AO — проекція ребра SA на площину основи).

***Властивість* 2.** Якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).

● *Доведення*. Нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 2). З основи висоти — точки O у площині основи піраміди проведемо $OM \perp BC$, $OK \perp AC$, $ON \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$, $SK \perp AC$, $SN \perp AB$. Отже, $\angle SMO$, $\angle SKO$, $\angle SNO$ — лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи, тобто кутів нахилу бічних граней до основи.

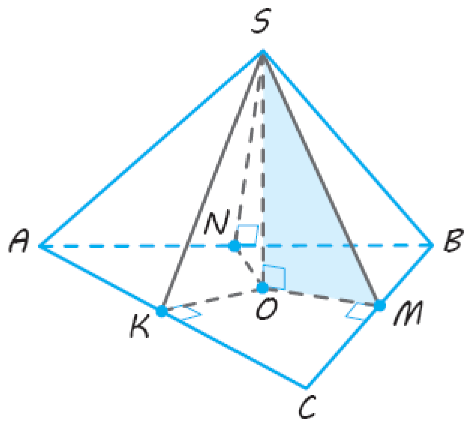


Рис. 2

Зазначене у властивості твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників *SOM*, *SOK*, *SON* (для доведення прямого твердження використовуємо рівність трикутників за спільним катетом *SO* і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

Наприклад, якщо всі бічні грані піраміди утворюють рівні кути з основою: $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OM = OK = ON$. Отже, точка *O* рівновіддалена від сторін основи і є центром кола, вписаного в основу піраміди — трикутник *ABC*.

Обернене твердження обґрунтуйте самостійно. ○

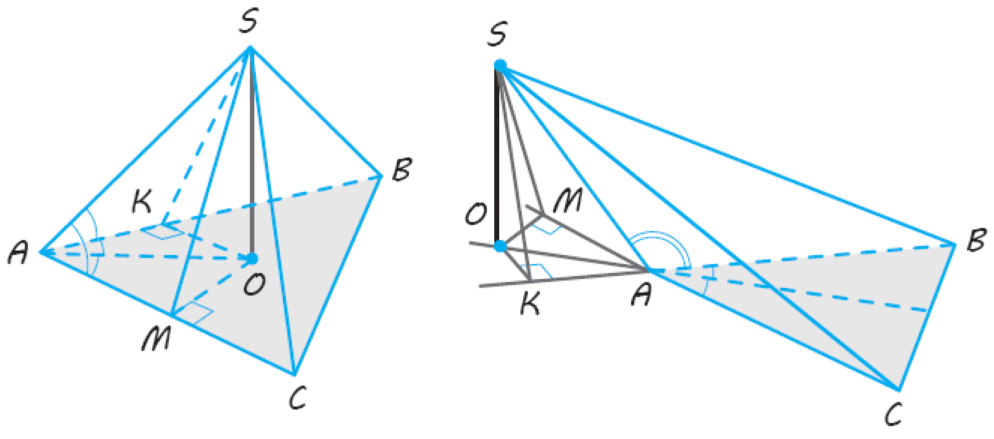
Зазначимо, що для пірамід, про які йдеться у формулюванні властивості 2, площу бічної поверхні можна обчислити за формулою $S_{\text{бічн}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи піраміди, а $S_{\text{бічн}}$ — площа основи піраміди.

Обґрунтування цієї формули повністю збігається з обґрунтуванням, наведеним у п. 2 § 4 для правильної піраміди (виконайте його самостійно).

Також зазначимо, що для розв'язання задач, пов'язаних з пірамідами такого виду, зазвичай використовують прямокутний трикутник *SOM* (див. рис. 2), у якому $SO \perp OM$, $OM = r_{\text{вп}}$ (радіус кола, вписаного в основу піраміди), $\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані *SBC* до основи.

***Властивість* 3.** Якщо тільки дві суміжні бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основ, то це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними із цим ребром сторонами основ (і навпаки).

● *Доведення.* Нехай SO — висота піраміди $SABC$ (рис. 3). З основи висоти — точки O в площині основи піраміди проведемо $OM \perp AC$ і $OK \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $SM \perp AC$ і $SK \perp AB$. Отже, кути SMO і SKO — лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи (рис. 3, *а*), тобто кути нахилу бічних граней до площини основи. Якщо $\angle SMO = \angle SKO = \varphi$ (рис. 3, *б)*, то відповідні лінійні кути двогранних кутів при ребрах основи дорівнюють $180° - \varphi$.



а *б*

Рис. 3

Зазначене у властивості твердження одержуємо з рівності прямокутних трикутників SOM і SOK (для доведення прямого твердження використовуємо рівність за спільним катетом SO і гострим кутом, а для доведення оберненого твердження — рівність за двома катетами).

Наприклад, якщо дві бічні грані піраміди однаково нахилені до основи: $\angle SMO = \angle SKO$, то з рівності зазначених трикутників одержуємо: $OM = OK$. Отже, точка O рівновіддалена від сторін AB і AC кута BAC (або від продовження цих сторін; рис. 3, *б)* і розташована на прямій AO, що містить бісектрису кута BAC. Ураховуючи, що відрізок AO є проекцією відрізка SA на площину ABC, одержуємо, що пряме твердження властивості 3 справедливе.

Обернене твердження обґрунтуйте самостійно. ○

Зауваження. Слід ураховувати, що в розглянутій властивості бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені не до площини основи, а саме до основи. Якщо ж в умові задачі буде сказано, що дві бічні грані однаково нахилені до площини основи, то в цьому випадку спільне ребро цих граней може проектуватися не тільки на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними сторонами основи, але й на бісектрису зовнішнього кута при відповідній вершині основи.

***Властивість* 4.** Якщо тільки одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, то висотою піраміди є висота цієї грані.

● *Доведення.* Нехай у піраміді $SABC$ $\text{пл.}\,SAC \perp \text{пл.}\,ABC$ (рис. 4). Проведемо висоту SO грані SAC: $SO \perp AC$, тоді (див. теорему 13.2, наведену в § 13 підручника для 10 класу: пряма, проведена в одній із двох перпендикулярних площин перпендикулярно до прямої їхнього перетину, перпендикулярна до другої площини). Отже, SO — висота піраміди. ○

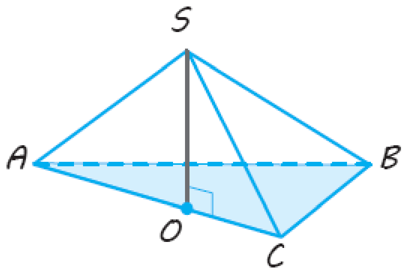


Рис. 4

***Властивість* 5.** Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є їх спільне бічне ребро.

***Властивість* 6.** Якщо дві несуміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди є відрізок прямої, по якій перетинаються площини цих граней.

● *Доведення.* Нехай у піраміді $SABC$ $\text{пл.}\,SAB \perp \text{пл.}\,ABC$ і $\text{пл.}\,SAC \perp \text{пл.}\,ABC$ (рис. 5). Площини SAB і SAC перетинаються по прямій SA. У підручнику для 10 класу (див. інтернет-підтримку до § 13) було обґрунтовано: якщо дві площини, які перетинаються, перпендикулярні до третьої площини, то пряма їхнього перетину перпендикулярна до цієї (третьої) площини. Отже, $SA \perp \text{пл.}\,ABC$, тобто SA — висота піраміди. Таким чином, властивість 5 доведено.

Якщо в піраміді $SABCD$ $\text{пл.}\,SAB \perp \text{пл.}\,ABCD$, $\text{пл.}\,SDC \perp \text{пл.}\,ABCD$ (рис. 6) і площини SAB і SDC перетинаються по прямій SO (точка O належить площині $ABCD$), то за властивістю 5 у піраміді $SOBC$ висотою є відрізок SO, тобто $SO \perp \text{пл.}\,ABCD$. Отже, відрізок SO є висотою і для піраміди $SABCD$. Таким чином, і властивість 6 доведено. ○

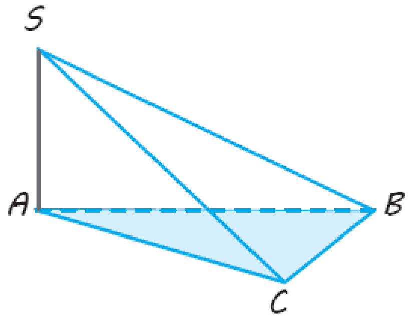


Рис. 5

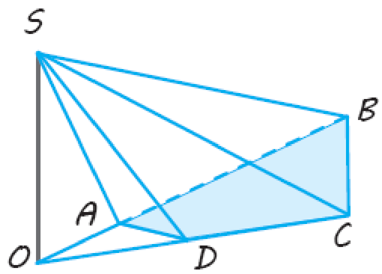


Рис. 6