Задача. Основою піраміди є ромб із гострим кутом α, висота піраміди дорівнює H (рис. 1). Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо всі її бічні грані нахилені до основи під кутом φ.

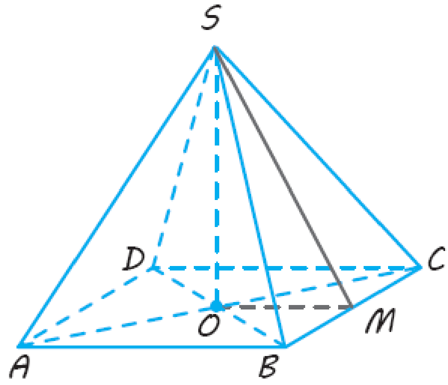

Рис. 1

Розв'язання	**Коментар**
► Нехай в основі піраміди *SABCD* (рис. 1) лежить ромб *ABCD*. За умовою всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи, тому основою висоти *SO* піраміди $(SO = H)$ є точка *O* — центр кола, вписаного в основу піраміди, тобто *O* — точка перетину діагоналей ромба $(SO \perp \text{пл. } ABCD)$. У площині *ABCD* проведемо перпендикуляр $OM \perp BC$. За теоремою про три перпендикуляри $SM \perp BC$. Тоді кут *SMO* — лінійний кут двогранного кута з ребром *BC*, а за умовою $\angle SMO = \varphi$. Із прямокутного трикутника *SMO* (*SO* — висота піраміди) знаходимо радіус кола, вписаного в ромб: $OM = SO \operatorname{ctg} \varphi = H \operatorname{ctg} \varphi$. Висота ромба дорівнює діаметру вписаного кола, тому, якщо $BK \perp AD$, то $BK = 2OM = 2H \operatorname{ctg} \varphi$ (рис. 2). Із прямокутного трикутника *ABK* маємо: $AB = \dfrac{BK}{\sin A} = \dfrac{2H \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \alpha}$.	Як і в задачі 1 до § 5 підручника, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди (звертаємо увагу на те, що всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи). На другому етапі обґрунтовуємо розташування просторового кута між бічною гранню й основою піраміди. Під час побудови зображення піраміди слід урахувати, що зображенням ромба може бути довільний паралелограм. Для побудови лінійного кута двогранного кута з ребром *BC* можна в площині основи піраміди провести з основи висоти — точки *O* перпендикуляр *OM* на ребро *BC*. Потім потрібно сполучити отриману точку *M* з вершиною *S* і використати теорему про три перпендикуляри (ураховуючи, що *OM* — проекція похилої *SM* на площину основи). Для виконання обчислювальної частини розв'язання спочатку розглянемо прямокутний трикутник *SOM*, із якого знайдемо катет *OM*. Потім урахуємо, що відрізок *OM*

Тоді $S_{ABCD} = AB^2 \sin\alpha = \dfrac{4H^2 \operatorname{ctg}^2\varphi}{\sin\alpha}$.

Усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом φ, тому площа бічної поверхні піраміди дорівнює:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi} = \frac{4H^2 \operatorname{ctg}^2\varphi}{\sin\alpha\cos\varphi}.$$

Відповідь: $\dfrac{4H^2 \operatorname{ctg}^2\varphi}{\sin\alpha\cos\varphi}$. ◁

дорівнює радіусу кола, вписаного в ромб, а діаметр кола дорівнює висоті ромба. Для останніх обчислень зручно використовувати виносний рисунок основи піраміди — ромб *ABCD* (рис. 2).

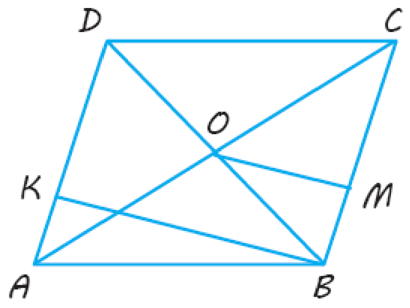

Рис. 2

Також слід урахувати, що у випадку, коли всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом φ, площу бічної поверхні піраміди можна обчислити за формулою $S_{\text{бічн}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}$.