Задача 2. У правильній трикутній піраміді *SABC* з основою *ABC* сторона основи дорівнює $12\sqrt{3}$, а бічне ребро — 13 (рис. 4.8). Знайдіть кут, який утворює пряма *MN* із площиною *ABC*, якщо точка *M* — середина сторони *BC*, а точка *N* — середина ребра *SA*.

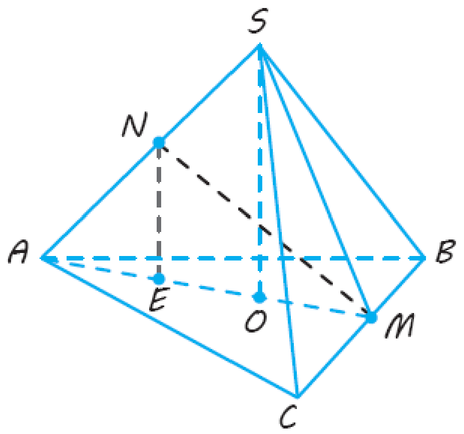

Рис. 4.8

Розв'язання	**Коментар**
► 1. Оскільки піраміда правильна, то основою її висоти *SO* $(SO \perp \text{пл. } ABCD)$ є центр *O* трикутника *ABC* — основи піраміди (тоді точка *O* належить медіані *AM*). У площині *ASM* проведемо відрізок $NE \parallel SO$ $(E \in AM)$. Тоді $NE \perp \text{пл. } ABC$. 2. Отже, *EM* — проекція *NM* на площину *ABC* і кут *NME* — кут між прямою *NM* і площиною *ABC*. 3. За властивістю правильного трикутника $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 18$. Тоді $AO = \frac{2}{3}AM = 12$. 4. Із прямокутного трикутника *ASO* (*SO* — висота піраміди) маємо: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Оскільки точка *N* — середина ребра *SA* і $SO \parallel NE$, то трикутники *ANE* і *ASO* подібні з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Тоді $NE = \frac{1}{2}SO = \frac{5}{2}$ і $AE = \frac{1}{2}AO = 6$.	*Як завжди, на першому етапі розв'язання обґрунтовуємо розташування висоти піраміди, а на другому — розташування просторового кута між прямою й площиною.* *За означенням, кут між прямою MN і площиною ABC — це кут між прямою та її проекцією на площину ABC. Точка M лежить у площині ABC і проектується на цю площину сама в себе. Щоб спроектувати точку N на площину ABC, потрібно провести перпендикуляр NE на площину ABC. Це можна зробити декількома способами. Наприклад, урахувати, що висота SO перпендикулярна до площини ABC, і провести* $NE \parallel SO$ *або врахувати, що площина SAM, яка проходить через висоту SO, перпендикулярна до площини ABC, і провести перпендикуляр до прямої їхнього перетину* $(NE \perp AM)$.

5. Далі маємо: $EM = AM - AE = 12$. Із прямокутного трикутника *NME* маємо: $\operatorname{tg} \angle NME = \frac{NE}{EM} = \frac{5}{24}$. Отже, $\angle NME = \operatorname{arctg} \frac{5}{24}$. *Відповідь*: $\operatorname{arctg} \frac{5}{24}$. ◁	Записуючи за значенням тангенса кута величину цього кута, слід ураховувати, що кут між прямою і площиною може бути тільки в межах $[0°; 90°]$. Але в цьому випадку це кут прямокутного трикутника, тому він має бути в межах $(0°; 90°)$, тобто є гострим кутом. Отже, одержуємо тільки один кут, тангенс якого дорівнює $\frac{5}{24}$, — це $\operatorname{arctg} \frac{5}{24}$.

Задача 3. У правильній трикутній піраміді *SABC* з основою *ABC* бічне ребро вдвічі більше за сторону основи (рис. 4.9). Точки *K* і *L* — середини ребер *AB* і *BC* відповідно. Через пряму *KL* паралельно ребру *SC* проведено площину α. Знайдіть кут між площиною α і площиною *ABC*.

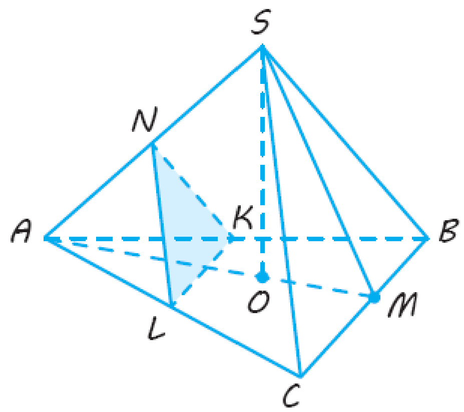

Рис. 4.9

Розв'язання	**Коментар**
► 1. Оскільки піраміда правильна, то основою її висоти *SO* є центр *O* трикутника основи — точка перетину висот, медіан і бісектрис трикутника *ABC*. 2. Нехай *N* — середина ребра *SB*. Тоді *LN* — середня лінія трикутника *BSC* і $LN \parallel SC$. Отже, $SC \parallel$ пл. LNK, тобто площина *LNK* і є заданою січною площиною α.	Як було зазначено вище, спочатку можна побудувати переріз, а потім доводити, що він паралельний ребру *SC*, — саме так і зроблено в розв'язанні. Але можна зробити інакше: описувати розташування перерізу, спираючись на властивості паралельності прямих і пло-щин. Наприклад, необхідно врахувати, що через пряму *SC* (яка паралельна

3. Ураховуючи, що $LK \parallel AC$ (середня лінія трикутника *ABC*) і $LN \parallel SC$, маємо: $\alpha \parallel$ пл. SAC. Але паралельні площини утворюють рівні кути із січною площиною, тому шукатимемо кут між площинами *SAC* і *ABC*. 4. Якщо $BM \perp AC$, то $SM \perp AC$ (за теоремою про три перпендикуляри), отже, кут *SMO* — лінійний кут гострого двогранного кута при ребрі *AC*. 5. Нехай $AB = AC = BC = x$, тоді за умовою $SA = SB = SC = 2x$. 6. За властивістю правильного трикутника *ABC* одержуємо: $OM = \frac{1}{3}BM = \frac{x\sqrt{3}}{6}$ і $AM = \frac{1}{2}AC = \frac{x}{2}$. 7. Із прямокутного трикутника *SAM* маємо: $SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{(2x)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{x\sqrt{15}}{2}$. 8. Із прямокутного трикутника *SMO* одержуємо: $\cos\angle SMO = \frac{OM}{SM} = \frac{1}{3\sqrt{5}}$. Отже, шуканий кут дорівнює $\arccos\frac{1}{3\sqrt{5}}$. *Відповідь*: $\arccos\frac{1}{3\sqrt{5}}$. ◁	січній площині α) проходить площина *SBC*, що перетинає площину α по прямій *LN*, паралельній прямій *SC*. Виконувати й оформляти розв'язання можна за схемою, наведеною в п. 4 § 1. 1. Обґрунтувати розташування висоти піраміди (у цьому випадку достатньо використовувати означення правильної піраміди). 2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно (у цій задачі це кут між площиною α й площиною *ABC*). Для такого обґрунтування доцільно врахувати, що площина α паралельна площині *SAC*, тому з площиною *ABC* вони утворюють рівні кути. 3. Обґрунтувати вид і розташування заданого перерізу. 4. На кожному етапі обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому. Крім того, слід урахувати ще один орієнтир: якщо в умові задачі на обчислення не задано довжину жодного відрізка (або задані відрізки й кути не вдається об'єднати в зручний для розв'язання трикутник), то для її розв'язання доцільно ввести невідомий відрізок (або невідомий кут, або декілька невідомих).