Задача 2. Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$, площа якої дорівнює 84 см^2. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції й у шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину, паралельну ребру AB. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо висота призми дорівнює 9 см.

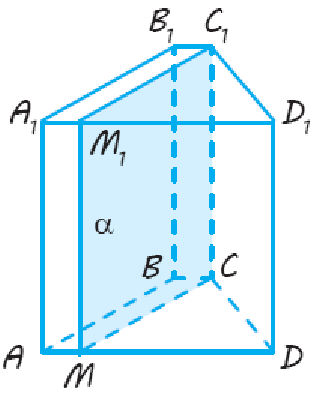
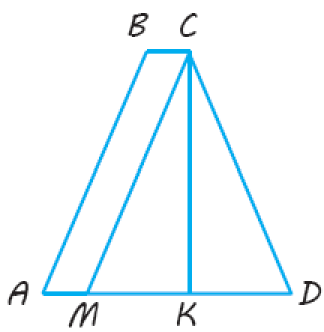
Коментар

Нагадаємо, що в задачах на знаходження площі перерізу можна спочатку побудувати потрібний переріз, визначити його форму, а потім знайти його площу. Але можна почати розв'язування іншим шляхом: уважати, що переріз уже побудований. Потім, спираючись на властивості паралельності або перпендикулярності прямих і площин, обґрунтувати форму перерізу, а тоді знайти його площу. Отже, записувати початок розв'язання можна одним із двох способів (див. нижче).

Починаючи обчислення, слід урахувати, що задані в умові елементи призми (висота й площа її основи) не дозволяють розглянути жодний трикутник, у якому відомі хоча б два елементи. Тому для виконання обчислень доведеться ввести невідомий відрізок (наприклад, позначити: $BC = x$) і скласти рівняння, із якого можна визначити невідомий відрізок (для цього достатньо виразити задану площу через x).

Розв'язання

► 1. Початок обґрунтування форми перерізу.

I спосіб	II спосіб
За умовою пряма AB паралельна площині перерізу α і через пряму AB проходить площина $ABCD$, отже, пряма CM перетину цих площин паралельна прямій AB (рис. 3.7).  Рис. 3.7	Проведемо в площині $ABCD$ пряму $CM \parallel AB$ (рис. 3.8). Через CM і CC_1 проведемо площину α. За ознакою паралельності прямої й площини $\alpha \parallel AB$.  Рис. 3.8

2. Ураховуючи, що площини основ призми паралельні, маємо робимо висновок, що відповідні прямі їхнього перетину з площиною α також будуть паралельними: $C_1M_1 \parallel CM$. Крім того, паралельними є бічні грані AA_1D_1D і BB_1C_1C ($AD \parallel BC$

і $DD_1 \parallel CC_1$), тому відповідні прямі їхнього перетину з площиною α також паралельні: $MM_1 \parallel CC_1$. Отже, CMM_1C_1 — паралелограм. Але $CC_1 \perp \text{пл.}\, ABCD$ (призма пряма), тому $CC_1 \perp CM$, тобто CMM_1C_1 — прямокутник.

3. У трапеції *ABCD* (рис. 3.8) позначимо $BC = x$ $(x > 0)$. Якщо $CK \perp AD$, то за умовою $h_{\text{тр}} = CK = AD = 6x$. Ураховуючи, що $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h = 84$, одержуємо рівняння $\frac{6x + x}{2} \cdot 6x = 84$, звідки $21x^2 = 84$, $x^2 = 4$, $x = 2$. Звідси $BC = x = 2$ см, $AD = CK = 6x = 12$ см.

4. Ураховуючи властивості рівнобічної трапеції ($AM = BC = 2$ см, $MD = AD - AM = 10$ см, точка *K* — середина *MD*, тоді $MK = 5$ см), із прямокутного трикутника *MCK* маємо: $CM = \sqrt{CK^2 + MK^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см).

5. За умовою призма пряма, отже, бічне ребро дорівнює висоті призми, тобто $CC_1 = 9$ см. Тоді площа перерізу дорівнює: $S_{CMM_1C_1} = CM \cdot CC_1 = 13 \cdot 9 = 117$ (см^2).

Відповідь: 117 см^2. ◁

Задача 3. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат *ABCD* зі стороною 3 см. Бічне ребро AA_1 дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу паралеле-піпеда площиною, що проходить через вершину *A* перпендикулярно до прямої BA_1.

Розв'язання

► 1. Обґрунтування форми перерізу.

I спосіб	II спосіб
Оскільки за умовою площина перерізу $\alpha \perp BA_1$, то пряма *AM* перетину площин α і AA_1B_1B (рис. 3.9) перпендикулярна до прямої BA_1 $(AM \perp BA_1)$. Ураховуючи, що $AD \perp \text{пл.}\, AA_1B_1B$, маємо: $AD \perp BA_1$. Але $\alpha \perp BA_1$, отже, пряма *AD* лежить у площині α (тобто площина α проходить через пряму *AD* і $AM \perp BA_1$).	Проведемо в площині AA_1B_1B пряму $AM \perp BA_1$ (рис. 3.9). Через прямі *AM* і *AD* проведемо площину α. Доведемо, що $\alpha \perp BA_1$. Оскільки $AD \perp \text{пл.}\, AA_1B_1B$, то маємо: $AD \perp BA_1$. Ураховуючи, що за побудовою $AM \perp BA_1$, одержуємо: $\alpha \perp BA_1$.

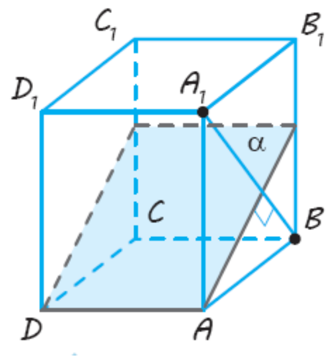


Рис. 3.9

2. Оскільки площини протилежних бічних граней прямокутного паралелепіпеда попарно паралельні, то відповідні прямі їхнього перетину з площиною α також попарно паралельні: $MN \parallel AD$, $AM \parallel DN$. Тоді $AMND$ — паралелограм. Але $AD \perp \text{пл.}\, AA_1B_1B$, отже, $AD \perp AM$, тобто $AMND$ — прямокутник.

3. Із прямокутного трикутника AA_1B $\left(AA_1 \perp \text{пл.}\, ABCD\right)$ маємо:

$A_1B = \sqrt{AB^2 + A_1A^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

4. Із подібності трикутників AMB і A_1BA (їх гострі кути рівні як кути з відповідно перпендикулярними сторонами) маємо: $\frac{AM}{A_1B} = \frac{AB}{AA_1}$. Тоді $\frac{AM}{5} = \frac{3}{4}$. Отже, $AM = \frac{15}{4}$ (см).

5. Знаходимо площу перерізу: $S_{AMND} = AD \cdot AM = 3 \cdot \frac{15}{4} = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4} = 11{,}25$ (см^2).

Відповідь: 11,25 см^2. ◁

Зауваження. Для обчислення площі перерізу $S_{\text{перерізу}}$ можна також використовувати ортогональну проекцію перерізу на площину нижньої основи заданого прямокутного паралелепіпеда (переріз проектується в квадрат основи $ABCD$) і обчислити площу перерізу за формулою, обґрунтованою в § 14 підручника для 10 класу:

$$S_{\text{перерізу}} = \frac{S_{\text{проекції}}}{\cos\varphi} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi},$$

де φ — кут між площиною перерізу й площиною проекції; $S_{\text{проекції}}$ — площа ортогональної проекції перерізу на площину нижньої основи заданого прямокутного паралелепіпеда.

У цьому випадку не потрібно обґрунтовувати форму перерізу (хоча доводиться обґрунтовувати або використовувати перпендикулярність площини перерізу до прямої BA_1; див. п. 1 **розв'язання**). Однак потрібно обґрунтувати, який саме кут є лінійним кутом двогранного кута, утвореного січною площиною й площиною ортогональної проекції перерізу. Це можна зробити, наприклад, у такий спосіб: оскільки $AB \perp AD$ (як сторони квадрата $ABCD$) і $MA \perp AD$ (оскільки $AD \perp$ пл. AA_1B_1B), то $\angle MAB$ — лінійний кут двогранного кута з ребром AD (тобто це і є кут φ між січною площиною й площиною ортогональної проекції перерізу). Для знаходження $\cos\varphi$ можна знову скористатися подібністю трикутників AMB і A_1BA.

Тоді $\cos\varphi = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{AA_1}{A_1B} = \dfrac{4}{5}$ і $S_{\text{перерізу}} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} = \dfrac{9}{\frac{4}{5}} = \dfrac{45}{4} = 11\dfrac{1}{4}$ (см^2).

Задача 4*. Сторони основи правильної чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнюють 2, а бічні ребра — 5. На ребрі AA_1 позначили точку E таку, що $AE = 3$. Знайдіть кут між площинами ABC і BED_1.

<table>
<tr><th>Розв'язання</th><th>Коментар</th></tr>
<tr><td>

► 1. Оскільки задана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 3.10) правильна, то її висотою є бічне ребро $AA_1 \perp$ пл. $ABCD$.

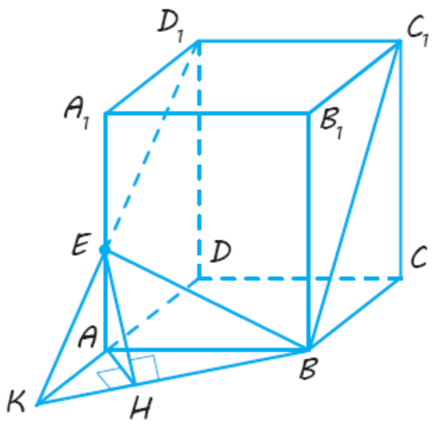


Рис. 3.10

2. Нехай пряма D_1E перетинає пряму DA в точці K, тоді BK — пряма перетину площин ABC і BED_1.

У площині $ABCD$ проведемо $AH \perp BK$, тоді $EH \perp BK$ (за теоремою про три перпендикуляри), отже, $\angle EHA$ — лінійний кут двогранного кута з ребром BK (який і дорівнює куту між площинами ABC і BED_1).

</td><td>

Використовуємо основні елементи схеми розв'язання задач на обчислення обчислення (див. § 1, п. 4).

1. Обґрунтувати розташування висоти многогранника.

2. Обґрунтувати, що просторові кути й просторові відстані позначені правильно.

3. На кожному кроці обчислень указати, елементи якого трикутника визначаєте, і якщо він прямокутний, пояснити чому.

Для обґрунтування того, який саме кут є кутом між площинами, побудуємо спочатку слід січної площини на площині основи (для цього достатньо знайти точку K перетину прямої D_1E та її проекції DA на площину основи). Потім побудуємо лінійний кут відповідного двогранного кута з ребром KB. Для цього використовуємо спосіб побудови, наведений в інтернет-підтримці до § 12 підручника для 10 класу: якщо з точки E, яка лежить на одній із граней двогранного кута, проведений перпендикуляр на його

</td></tr>
</table>

3. Із подібності трикутників AEK і A_1ED_1 (вони прямокутні з рівними гострими кутами) маємо: $\frac{AK}{A_1D_1}=\frac{AE}{A_1E}$. Ураховуючи, що за умовою $A_1D_1=AB=2$, $AA_1=5$, $AE=3$, а отже, $A_1E=2$, маємо: $\frac{AK}{2}=\frac{3}{2}$, тоді $AK=3$. 4. Із прямокутного трикутника AKB ($ABCD$ — квадрат, тому $BK=\sqrt{AK^2+AB^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$) маємо: $BK=\sqrt{AK^2+AB^2}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$. Тоді $S_{\triangle AKB}=\frac{1}{2}AB\cdot AK=\frac{1}{2}BK\cdot AH$. Звідси $AH=\frac{AB\cdot AK}{BK}=\frac{3\cdot 2}{\sqrt{13}}=\frac{6}{\sqrt{13}}$. 5. Із прямокутного трикутника EHA маємо: $\operatorname{tg}\angle EHA=\frac{AE}{AH}=\frac{3}{\frac{6}{\sqrt{13}}}=\frac{\sqrt{13}}{2}$. Отже, $\angle EHA=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$. *Відповідь*: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{13}}{2}$.	другу грань $(EA\perp \text{пл. } ABC)$, то для того, щоб побудувати відповідний лінійний кут, потрібно з основи заданого перпендикуляра (точки A) провести перпендикуляр на ребро двогранного кута й сполучити відрізком одержану на ребрі точку з точкою A. Нагадаємо, що для обчислення висоти AH прямокутного трикутника AKB достатньо записати його площу двома способами й прирівняти одержані вирази.