Площу бічної поверхні правильної піраміди можна обчислити за формулою

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi},$$

де φ — кут нахилу бічних граней до основи піраміди.

● Обґрунтуємо цю формулу, наприклад, для правильної трикутної піраміди *SABC* (рис. 1). Нехай усі бічні грані правильної піраміди нахилені до основи під кутом φ. Розглянемо ортогональні проекції бічних граней на площину основи. Грань *SBC* проектується в трикутник *BOC*, грань *SAB* — у трикутник *AOB*, грань *SAC* — у трикутник *AOC*.

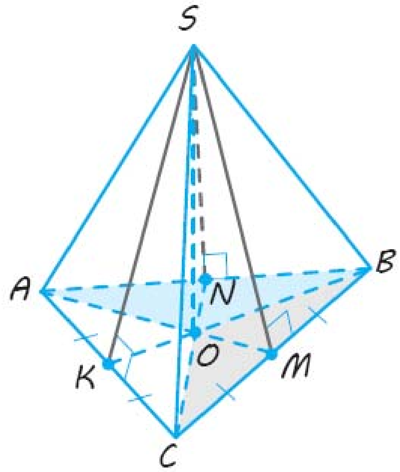

Рис. 1

Із урахуванням формули $S_{\text{фігури}} = \frac{S_{\text{проекції}}}{\cos\varphi}$, де $S_{\text{фігури}}$ — площа фігури, $S_{\text{проекції}}$ — площа проекції (див. § 14 підручника для 10 класу), одержуємо:

$$S_{\triangle SBC} = \frac{S_{\triangle BOC}}{\cos\varphi};\ S_{\triangle SAB} = \frac{S_{\triangle AOB}}{\cos\varphi};\ S_{\triangle BAC} = \frac{S_{\triangle AOC}}{\cos\varphi}.$$

Додаючи почленно отримані рівності (і враховуючи, що $S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SAC} = S_{\text{бічн}}$), маємо:

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC}}{\cos\varphi} = \frac{S_{\triangle ABC}}{\cos\varphi} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}.\ \circ$$

Аналогічно можна обґрунтувати, що отримана формула має місце для довільної правильної піраміди.

Побудова перерізу піраміди методом слідів

Для побудови перерізу чотирикутної піраміди *SABCD* площиною, що проходить через точки *K*, *M*, *N* на її ребрах (рис. 2), можна побудувати слід січної площини на площині основи. Для цього доцільно розглянути центральне проектування із центром *S* на площину основи піраміди або використовувати кілька допоміжних площин (див. інтернет-підтримку до § 3 підручника для 10 класу).

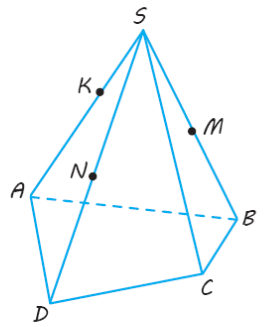

Рис. 2

У випадку центрального проектування проекцією відрізка *KN* є відрізок *AD*, а проекцією відрізка *KM* — відрізок *AB*. Щоб знайти слід січної площини на площині основи, достатньо знайти дві точки перетину прямих січної площини з їхніми проекціями на площину основи.

Знаходимо точки перетину прямих *KN* і *AD* — точку *Q* — і прямих *KM* і *AB* — точку *P* (рис. 3). Тоді *QP* — слід січної площини на площині *ABCD*. Щоб знайти точку *L* перетину ребра *SC* із січною площиною, використовуємо те, що пряма *KL* перетинається з її проекцією (*AC*) у точці, що лежить на сліді *QP*. Тому проводимо пряму *AC* до перетину зі слідом у точці *T* і, сполучаючи точку *T* із точкою *K*, у перетині з ребром *SC* одержуємо точку *L* перетину січної площини з ребром *SC*. Потім, сполучаючи точки перетину січної площини з ребрами піраміди, одержуємо шуканий переріз *KMLN*.

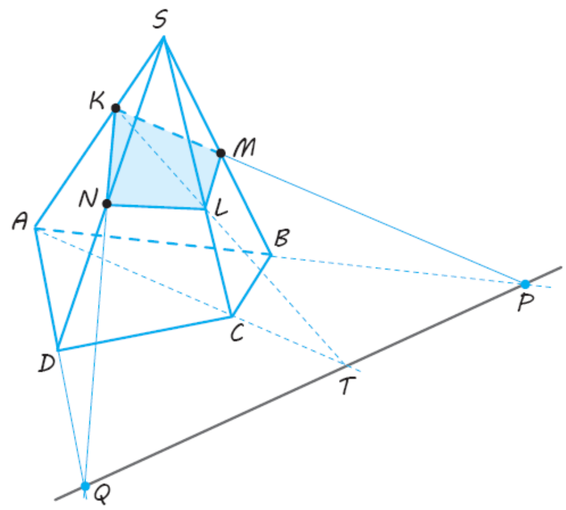

Рис. 3

Зрізана піраміда

Інший особливий випадок перерізу піраміди — переріз площиною, паралельною основі піраміди. *В перерізі піраміди площиною, паралельною основі, одержуємо многокутник, подібний до многокутника основи* (рис. 4) (і одержуємо піраміду, подібну до заданої).

***Теорема* 4.2.** Площина, що перетинає піраміду і паралельна її основі, відтинає подібну піраміду (рис. 4).

● Нехай S — вершина піраміди, A — вершина основи і A_1 — точка перетину січної площини з бічним ребром SA (див. рисунок у верхній частині таблиці). Застосуємо до піраміди перетворення гомотетії з центром S і коефіцієнтом гомотетії $k=\frac{SA_1}{SA}$. У результаті такої гомотетії площина основи переходить у паралельну площину, що проходить через точку A_1, тобто в січну площину, а отже, уся піраміда переходить у верхню її частину, яка відтинається цією площиною. Оскільки гомотетія є перетворенням подібності, то частина піраміди, яка відтинається, є пірамідою, подібною заданій. ○

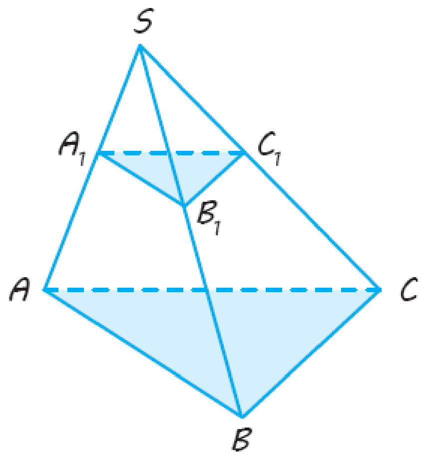

Рис. 4

Зазначимо, що в подібних фігурах коефіцієнт подібності дорівнює відношенню будь-яких відповідних відрізків. Тому розглянутий у доведенні коефіцієнт подібності (гомотетії) дорівнює також відношенню довжин відповідних сторін основ пірамід або відношенню довжин відповідних висот пірамід тощо.

За теоремою 4.2 площина, що паралельна площині основи піраміди і перетинає її бічні ребра, відтинає від неї подібну піраміду. Інша частина — многогранник, який називається зрізаною пірамідою (рис. 5).

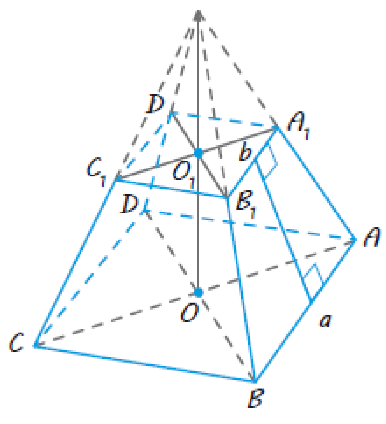

Рис. 5

Грані зрізаної піраміди, що лежать у паралельних площинах, називаються *основами*; інші грані називаються *бічними гранями*. Ребра зрізаної піраміди, що не лежать у площинах основ, називаються *бічними ребрами*. Основи зрізаної піраміди є подібними (більше того, гомотетичними) многокутниками, бічні грані — трапеціями.

Висотою зрізаної піраміди називається перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на іншу основу (нагадаємо, що його довжина дорівнює відстані між паралельними основами зрізаної піраміди).

Відрізок, що сполучає дві вершини зрізаної піраміди, які не належать до однієї грані, називається *діагоналлю зрізаної піраміди*.

Якщо зрізана піраміда отримана із правильної піраміди, то вона називається *правильною зрізаною пірамідою*, висота бічної грані називається *апофемою правильної зрізаної піраміди*, а пряма, що містить висоту піраміди, яка проходить через центри основ, — *віссю правильної зрізаної піраміди*.

Основами правильної зрізаної піраміди є подібні правильні многокутники. Усі бічні грані правильної зрізаної піраміди — рівні рівнобічні трапеції.

Приклади розв’язування задач

Задача 1. Бічне ребро піраміди розділили на три рівні частини й через точки поділу провели площини, паралельні основі (рис. 6). Площа основи дорівнює 900 см^2. Знайдіть площі перерізів.

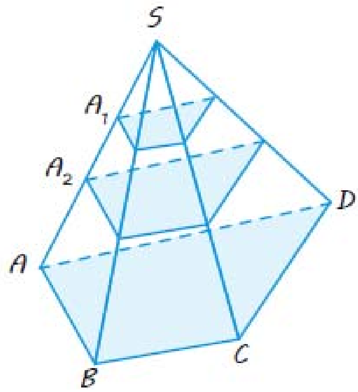

Рис. 6

Розв’язання	Коментар
► Отримані перерізи подібні основам піраміди з коефіцієнтами подібності $k_1 = \frac{SA_1}{SA} = \frac{1}{3}$ і $k_2 = \frac{SA_2}{SA} = \frac{2}{3}$. Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності. Тому відношення площ перерізів до площ основ піраміди дорівнюють $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Отже, площі перерізів дорівнюють: $900 \cdot \frac{1}{9} = 100$ (см^2) і $900 \cdot \frac{4}{9} = 400$ (см^2). *Відповідь*: 100 см^2 і 400 см^2. ◁	Кожна з площин, паралельних основі, за теоремою 4.2 відтинає від заданої піраміди подібну їй піраміду (з коефіцієнтом подібності, що дорівнює відношенню будь-яких відповідних елементів цих пірамід, тобто коефіцієнт подібності дорівнює відношенню відповідних бічних ребер, або висот пірамід, або відповідних сторін основи пірамід тощо). Із подібності пірамід одержуємо, що їх основи теж подібні з тим самим коефіцієнтом подібності (а відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності).

Задача 2. Доведіть, що **площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему**.

Розв'язання	Коментар
► Бічні грані зрізаної піраміди — рівні рівнобічні трапеції з верхньою основою a, нижньою основою b і висотою (апофемою) l. Тому площа однієї грані дорівнює $\frac{a+b}{2}\cdot l$. Площа всіх граней, тобто площа бічної поверхні, дорівнює: $$n\cdot\frac{a+b}{2}\cdot l=\frac{an+bn}{2}\cdot l,$$ де n — число вершин основи піраміди; an і bn — периметри основ піраміди. ◁	Площа бічної поверхні правильної n-кутної зрізаної піраміди дорівнює сумі площ n рівних бічних граней, кожна з яких є рівнобічною трапецією. Тому для знаходження площі бічної поверхні можна знайти площу однієї бічної грані й помножити результат на n.

Задача 3. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють Q_1 й Q_2 (рис. 7). Через середину висоти проведено площину, паралельну основі, Q — площа отриманого перерізу. Доведіть, що $\sqrt{Q}=\frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$.

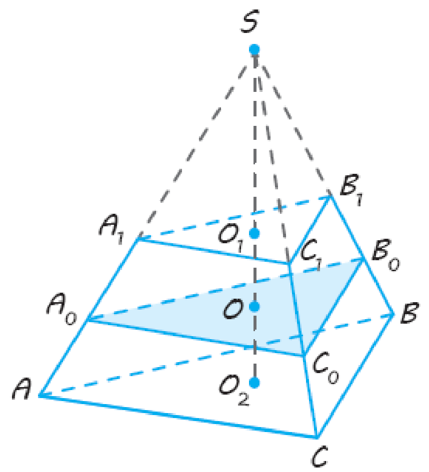

Рис. 7

Розв'язання	Коментар
► Нехай у зрізаній піраміді площа меншої основи дорівнює Q_1, а площа більшої — Q_2. За означенням зрізана піраміда є частиною повної піраміди з вершиною S і висотою SO_2 (рис. 7). Позначимо точки перетину висоти: з меншою основою зрізаної піраміди — через O_1, а із січною площиною — через O. Тоді O_1O_2 — висота зрізаної	Якщо доповнити зрізану піраміду до повної, то можна скористатися властивістю, наведеною в теоремі 4.2: площина, що перетинає піраміду й паралельна її основі, відтинає подібну піраміду (а тому й основи цих пірамід подібні). Далі слід пригадати, що відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату

піраміди, а за умовою $O_1O = OO_2$. Також позначимо $SO_1 = H$, $O_1O = OO_2 = h$. Ураховуємо, що січні площини, паралельні основі ABC повної піраміди, відтинають від неї подібні піраміди, у яких відношення площ основ дорівнюють: $\frac{Q_2}{Q_1} = \left(\frac{H+2h}{H}\right)^2 = \left(1+\frac{2h}{H}\right)^2$, (1) $\frac{Q}{Q_1} = \left(\frac{H+h}{H}\right)^2 = \left(1+\frac{h}{H}\right)^2$. (2) Із рівності (1) одержуємо: $\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} = 1+2\frac{h}{H}$, (3) а з рівності (2) маємо: $\frac{h}{H} = \sqrt{\frac{Q}{Q_1}} - 1$. (4) Підставляючи з рівності (4) значення $\frac{h}{H}$ у рівність (3), одержуємо: $\sqrt{\frac{Q_2}{Q_1}} = 1+2\left(\sqrt{\frac{Q}{Q_1}} - 1\right)$. Звідси $\sqrt{Q_2} = \sqrt{Q_1} + 2\sqrt{Q} - 2\sqrt{Q_1}$. Тоді $\sqrt{Q} = \frac{\sqrt{Q_1}+\sqrt{Q_2}}{2}$, що й було потрібно довести. ◁	коефіцієнта подібності (який дорівнює відношенню будь-яких відповідних відрізків, наприклад, відношенню відповідних висот пірамід). Також зручно використовувати введення невідомих відрізків, позначивши висоту найменшої повної піраміди через *H*, а половину висоти заданої зрізаної піраміди — через *h*. Для одержання потрібного співвідношення доцільно з отриманих рівностей виділити відношення $\frac{h}{H}$ (поділивши вираз у дужках у рівностях 1 і 2 почленно на *H*). Наведемо кілька зауважень щодо побудови зображення до задачі. Оскільки наведені вище міркування не залежать від форми основ пірамід (а пов'язані тільки з їхніми висотами), то на рисунку можна зобразити трикутну піраміду. Зазначимо, що площини основ зрізаної піраміди паралельні, а за умовою січна площина також їм паралельна, тому прямі перетину цих площин із кожною бічною гранню паралельні. У результаті паралельного проектування паралельність прямих зберігається, тому на рис. 7 відповідні прямі паралельні (наприклад, $A_0C_0 \parallel AC \parallel A_1C_1$). Також зберігається відношення відрізків прямої, тому на рисунку точка *O* — середина відрізка O_1O_2, а точка A_0 — середина відрізка AA_1 (обґрунтуйте це самостійно).