**Обґрунтування деяких властивостей визначених інтегралів**

| |
|---|
| $\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ |
| $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$ |
| Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a;b]$ і $c\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. |

● Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то для функції $kf(x)$ первісною буде функція $kF(x)$. Тоді

$$\int\limits_a^b kf(x)dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b)-kF(a) = k(F(b)-F(a)) = k\int\limits_a^b f(x)dx .$$

Отже,

$$\int\limits_a^b k\cdot f(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \ \circ. \quad (7)$$

● Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для функції $g(x)$, то для функції $f(x)+g(x)$ первісною буде функція $F(x)+G(x)$. Тоді

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) =$$

$$=(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx .$$

Отже,

$$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx \ \circ. \quad (8)$$

● Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ і $c\in[a;b]$, то

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c)-F(a)+F(b)-F(c) = F(b)-F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx .$$

Отже, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $c\in[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \ \circ.$$

**Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми**

Історично виникнення інтеграла було зумовлене необхідністю обчислення площ фігур, обмежених кривими, зокрема обчислення площі криволінійної трапеції.

Розглянемо криволінійну трапецію, зображену на рис. 7.1.7 (функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$). Основу трапеції — відрізок $[a;b]$ — розбито на $n$ відрізків (не обов'язково рівних) точками $x_1$, $x_2$, ..., $x_{n-1}$ (для зручності будемо вважати, що $a=x_0$, $b=x_n$). Через ці точки проведено вертикальні прямі. На першому відрізку обрано довільну точку $c_1$, і на ньому як на основі побудовано прямокутник з висотою $f(c_1)$. Аналогічно на другому відрізку обрано довільну точку $c_2$, і на ньому як на основі побудовано прямокутник з висотою $f(c_2)$ і так далі.

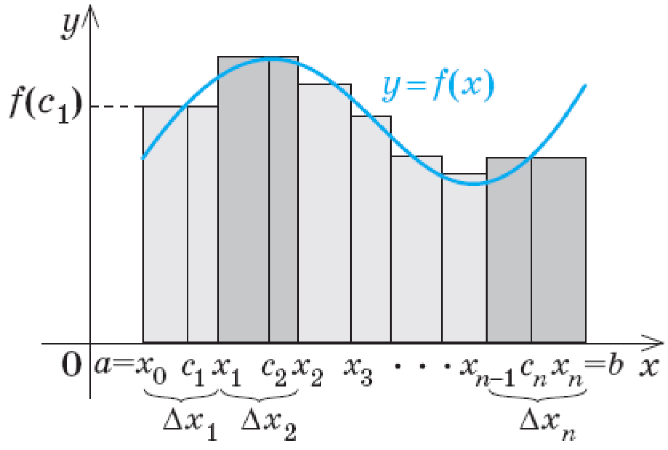


Рис. 7.1.7

Площа $S$ заданої криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ побудованих прямокутників.

Позначимо цю суму через $S_n$, довжину першого відрізка — через $\Delta x_1$, другого — через $\Delta x_2$ і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, ..., $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). Тоді

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n . \qquad (9)$$

Отже, площу $S$ криволінійної трапеції можна наближено обчислювати за формулою (9), тобто $S \approx S_n$.

Суму (9) називають *інтегральною сумою функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a;b]$. При цьому вважають, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і може набувати будь-яких значень: додатних, від'ємних, дорівнювати нулю (а не тільки невід'ємних, як для випадку криволінійної трапеції). Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума $S_n$ прямує до деякого числа, яке і називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$. Можна довести, що при цьому також виконується формула Ньютона — Лейбніца і всі розглянуті властивості визначеного інтеграла.

**Зауваження.** Змінюючи спосіб розбиття відрізка $[a;b]$ на $n$ частин (тобто фіксуючи інші точки $x_1$, $x_2$, ..., $x_{n-1}$) і вибираючи на кожному з одержаних відрізків інші точки $c_i$ (де $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i=1$, 2, ..., $n$), ми одержимо для функції $f(x)$ інші інтегральні суми. У курсі математичного аналізу доводиться, що для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ незалежно від способу розбиття цього відрізка і вибору точок $c_i$, якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральні суми $S_n$ прямують до одного й того самого числа.

Означення через інтегральні суми дозволяє наближено обчислювати визначені інтеграли за формулою (9). Але такий спосіб потребує громіздких обчислень, і його використовують у тих випадках, коли для функції $f(x)$ не вдається знайти первісну (тоді наближене обчислення визначеного інтеграла зазвичай проводять на комп’ютері з використанням спеціальних програм). Якщо ж первісна для функції $f(x)$ відома, то інтеграл можна обчислити точно, використовуючи формулу Ньютона — Лейбніца (див. приклад у п. 1 табл. 11 та приклади розв’язування завдань, наведені в підручнику).