Обчислення об’ємів тіл

Задача на обчислення об’єму тіла за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі на знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай задано тіло об’ємом V, причому є така пряма (вісь Ox на рис. 1), що яку б не взяли площину, перпендикулярну до цієї прямої, нам буде відома площа S перерізу тіла цією площиною. Але площина, перпендикулярна до осі Ox, перетинає її в деякій точці x. Отже, кожному числу x (з відрізка $[a;b]$ (див. рис. 1) поставлено у відповідність єдине число $S(x)$ — площа перерізу тіла цією площиною. Тим самим на відрізку $[a;b]$ задано функцію $S(x)$. Якщо функція S неперервна на відрізку $[a;b]$, то справджується формула

$$V = \int_a^b S(x)\,dx\,. \qquad (1)$$

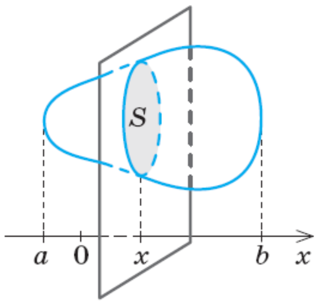


Рис. 1

Повне доведення цієї формули наведено в курсах математичного аналізу, а ми зупинимося на наочних міркуваннях, з яких вона випливає.

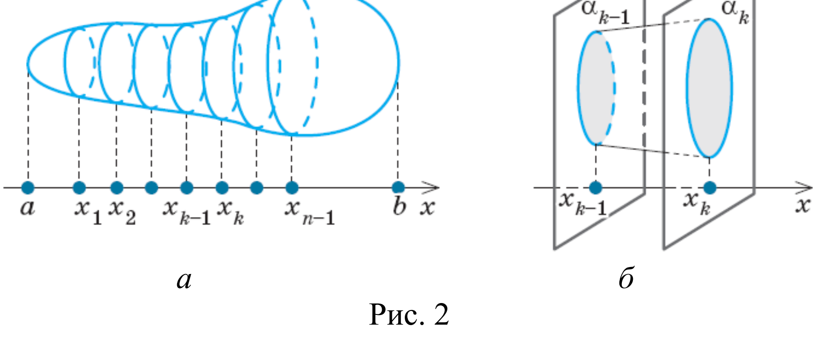
- Поділимо відрізок $[a;b]$ на n відрізків однакової довжини точками

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_{k-1}\,,\ \ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Через кожну точку x_k проведемо площину α_k, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари (рис. 2, *а*). Об’єм шару між площинами α_{k-1} і α_k (рис. рис. 2, *б*) при достатньо великих n наближено дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на «товщину шару» Δx, і тому

$$V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \ldots + S(x_n)\Delta x = V_n\,.$$



а *б*

Рис. 2

Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які розрізане тіло, тобто чим більше n.

Тому $V_n \to V$, якщо $n \to \infty$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V_n \to \int_a^b S(x)dx$, якщо $n \to \infty$.

Отже,

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

Використаємо одержаний результат для обґрунтування *формули об'єму тіл обертання*.

Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a;b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, яка невід'ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Унаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox утворюється тіло (рис. 3, *а*), об'єм якого можна знайти за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx . \qquad (2)$$

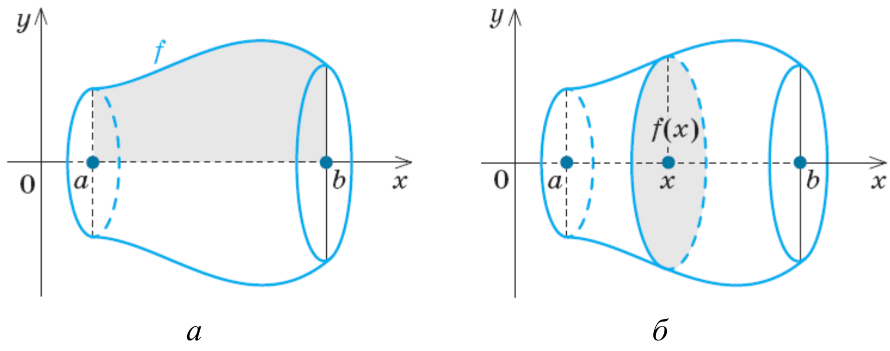


Рис. 3

Справді, перерізом тіла кожною площиною, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає відрізок $[a;b]$ цієї осі в точці x, є круг радіусом $f(x)$ і площею $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 3, *б*). Звідси за формулою (1) одержуємо формулу (2).