

Властивості логарифмічної функції

Властивості функції $y = \log_a x$ або визначимо з одержаного графіка цієї функції, або обґрунтуємо, спираючись на властивості функції $y = a^x$.

Оскільки область визначення прямої функції є областю значень оберненої, а область значень прямої функції — областю визначення оберненої, то, знаючи ці характеристики для функції $y = a^x$, одержимо відповідні характеристики для функції $y = \log_a x$:

Характеристика	Функція	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область визначення	\mathbf{R}	$(0; +\infty)$
Область значень	$(0; +\infty)$	\mathbf{R}

1. **Областю визначення функції $y = \log_a x$ є множина \mathbf{R}_+ усіх додатних чисел ($x > 0$).**

2. **Областю значень функції $y = \log_a x$ є множина \mathbf{R} усіх дійсних чисел (тоді функція $y = \log_a x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень).**

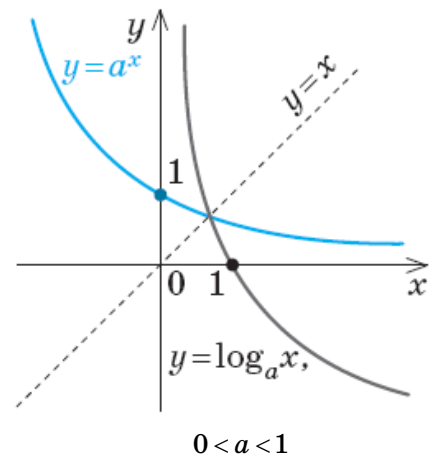
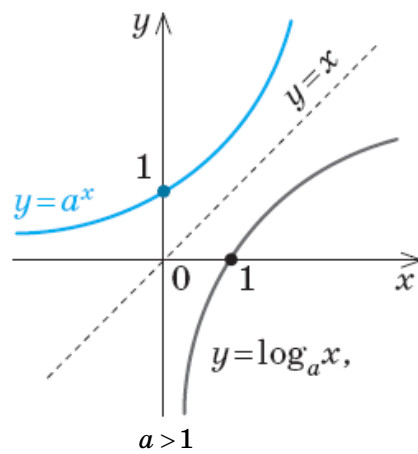
3. **Функція $y = \log_a x$ не може бути ні парною, ні непарною, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.**

4. **Графік функції $y = \log_a x$:**

- **не перетинає вісь Oy** , оскільки на осі Oy $x = 0$, а це значення не входить до області визначення функції $y = \log_a x$.

- **перетинає вісь Ox у точці $x = 1$** , оскільки $\log_a 1 = 0$ при всіх значеннях a ($a > 0$, $a \neq 1$).

5. **З графіків функції $y = \log_a x$, наведених на рисунку, робимо висновок, що при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення, а при $0 < a < 1$ спадає на всій області визначення.**



• Цю властивість можна обґрунтувати, спираючись не на вид графіка, а тільки на властивості функції $y = a^x$.

Наприклад, при $a > 1$ візьмемо $x_2 > x_1 > 0$. За основною логарифмічною тотожністю можна записати: $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. Тоді, урахувуючи, що $x_2 > x_1$, маємо $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. Оскільки при $a > 1$ функція $y = a^x$ зростаюча, то з останньої нерівності одержуємо $\log_a x_2 > \log_a x_1$. А це й означає, що при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення.

Аналогічно можна обґрунтувати, що при $0 < a < 1$ функція $y = \log_a x$ спадає на всій області визначення. ○

6. *Проміжки знакосталості.* Оскільки графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x = 1$, то, урахувуючи зростання функції при $a > 1$ та спадання при $0 < a < 1$, маємо:

Значення функції	Значення аргумента	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$