Рівносильні перетворення логарифмічного рівняння виду

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ (a > 0 \text{ і } a \neq 1). \qquad (1)$$

● Як уже зазначалося, усі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його ОДЗ. Для рівняння (1) ОДЗ задається системою нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Оскільки логарифмічна функція $\log_a t$ зростає (при $a > 1$) або спадає (при $0 < a < 1$) на всій своїй області визначення і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргумента, то рівність (1) може виконуватися (на ОДЗ) тоді й тільки тоді, коли $f(x) = g(x)$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо, що рівняння (4) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), & (2) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$$

Символічно одержаний результат подано в п. 4 табл. 7 підручника, а **орієнтир** коротко можна сформулювати так.

Щоб розв'язати рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ***за допомогою рівносильних перетворень, ураховуємо ОДЗ цього рівняння й прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів.*** ○

Приклад використання цього орієнтира наведено в табл. 7.

Зауваження 1. Систему (2)–(4) можна спростити. Якщо в цій системі виконується рівність (2), то значення $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють одне одному, тому коли одне з цих значень буде додатним, то друге теж буде додатним. Отже, рівняння (1) рівносильне системі, яка складається з рівняння (2) і однієї з нерівностей (3) або (4) — зазвичай вибирають простішу.

Наприклад, рівняння $\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$, розглянуте в табл. 7, рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 2 = 4x - 5, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ Але враховуючи, що обмеження ОДЗ цього рівняння $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0 \end{cases}$ ми не розв'язували — тільки перевіряли, чи задовольняють знайдені корені ці обмеження, наведене спрощення не дає суттєвого виграшу під час розв'язування цього рівняння.

Зауваження 2. Як було обґрунтовано вище, коли виконується рівність (1), то обов'язково виконується і рівність (2). Отже, рівняння (2) є наслідком рівняння (1), і тому для знаходження коренів рівняння (1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ достатньо знайти корені рівняння-наслідку (2) $f(x) = g(x)$ і виконати перевірку знайдених коренів підстановкою в задане рівняння. (Під час розв'язування рівняння у такий спосіб ОДЗ рівняння (1) буде враховано опосередковано, у момент перевірки одержаних коренів, тому її не доведеться записувати.)

Додатковий приклад розв'язування завдань

Приклад 7. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$

Розв'язання	*Коментар*
►ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ y > 0, \\ y \neq 1. \end{cases}$ Тоді з першого рівняння маємо: $$\frac{1}{\log_x y} + \log_x y = 2.$$ Виконаємо *заміну* $t = \log_x y$. Одержимо: $\frac{1}{t} + t = 2$; $t^2 - 2t + 1 = 0$; $t = 1$. Виконавши обернену заміну, отримаємо: $\log_x y = 1$, тобто $y = x$. Тоді з другого рівняння системи маємо: $x^2 - x - 20 = 0$; $x_1 = -4$ (не входить до ОДЗ), $x_2 = 5$ (входить до ОДЗ). Отже, розв'язок заданої системи: $$\begin{cases} x = 5, \\ y = 5. \end{cases}$$ *Відповідь*: $(5; 5)$. ◁	Розв'яжемо задану систему за допомогою рівносильних перетворень. Для цього достатньо урахувати її ОДЗ і гарантувати, що на кожному кроці було виконано саме рівносильні перетворення рівняння або всієї системи. У першому рівнянні системи всі логарифми зведемо до однієї основи x (на ОДЗ $x > 0$, $x \neq 1$): $\log_y x = \frac{\log_x x}{\log_x y} = \frac{1}{\log_x y}$. На ОДЗ $y \neq 1$, отже, $\log_x y \neq 0$. Тоді після заміни $t = \log_x y$ маємо $t \neq 0$, і тому перехід у розв'язанні від дробового рівняння до квадратного є рівносильним. Оскільки заміна (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням, то, замінюючи перше рівняння системи рівносильним йому (на ОДЗ) рівнянням $y = x$, одержуємо систему, рівносильну заданій (на її ОДЗ).