Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей

Найпростішими логарифмічними нерівностями звичайно вважають нерівності виду

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (де } a>0 \text{ і } a \neq 1). \qquad (1)$$

Для розв'язування такої нерівності можна використати рівносильні перетворення.

Розв'язуючи нерівність у такий спосіб, необхідно врахувати її ОДЗ: $\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \end{cases}$ і розглянути два випадки: основа логарифма більша за 1 або основа менша від 1 (але більша за 0).

I. Якщо $a>1$, логарифмічна функція $y=\log_a t$ зростає на всій області визначення (тобто при $t>0$), і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргумента. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргумента (у даному випадку переходячи до виразів, які стоять під знаком логарифма), ми повинні залишити знак нерівності, тобто

$$f(x)>g(x). \quad (2)$$

Ураховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати і у зворотному напрямку (більшому додатному значенню аргумента відповідає більше значення функції), одержуємо, що на ОДЗ нерівність (1) рівносильна нерівності (2). Коротко це можна записати так:

$$\text{якщо } a>1, \text{ то } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>g(x), & (2) \\ f(x)>0, & (3) \\ g(x)>0. & (4) \end{cases}$$

II. Якщо $0<a<1$, логарифмічна функція $y=\log_a t$ спадає на всій області визначення (тобто при $t>0$), і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргумента. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргумента, ми повинні змінити знак нерівності на протилежний, тобто

$$f(x)<g(x). \quad (5)$$

Ураховуючи, що на ОДЗ указаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (меншому додатному значенню аргумента відповідає більше значення функції), одержуємо, що при $0<a<1$ нерівність (1) на її ОДЗ рівносильна нерівності (5). Коротко це записуємо так:

$$\text{якщо } 0<a<1, \text{ то } \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)<g(x), & (5) \\ f(x)>0, & (3) \\ g(x)>0. & (4) \end{cases}$$

Підсумовуючи одержані результати, зазначимо, що для розв'язування нерівності $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ *за допомогою рівносильних перетворень необхідно врахувати її ОДЗ, а при переході від значень функції до значень аргумента (тобто до виразів, які стоять під знаком логарифма) урахувати значення а:*

• *якщо* $a>1$, *знак нерівності не змінюється,*

• *якщо* $0 < a < 1$, *знак нерівності змінюється на протилежний.*

Приклади використання цих орієнтирів наведено в табл. 8 підручника.

Зауваження. Системи нерівностей, які одержано для випадків (I) і (II), можна дещо спростити. Наприклад, якщо в системі, отриманій для випадку I, виконуються нерівність (2) $f(x) > g(x)$ і нерівність (4) $g(x) > 0$, то з цих нерівностей випливає, що $f(x) > 0$. Отже, нерівність (3) цієї системи автоматично виконується, коли виконуються нерівності (2) і (4), тому її можна не записувати до цієї системи (див. п. 2 табл. 8).

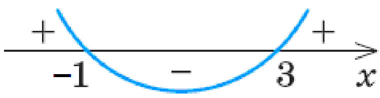
Аналогічно обґрунтовується, що в системі, отримній для випадку II, нерівність (4) є наслідком нерівностей (3) і (5), її теж можна не записувати до системи.

Наприклад, розв'яжемо нерівність $\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3$.

$$\blacktriangleright \quad \log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3.$$

(ОДЗ заданої нерівності $x^2 - 2x > 0$ враховано автоматично, оскільки якщо виконується нерівність $x^2 - 2x > 3$, то виконується і нерівність $x^2 - 2x > 0$.)

Розв'язуємо нерівність $x^2 - 2x > 3$. Тоді $x^2 - 2x - 3 > 0$, отже (див. рисунок), $x < -1$ або $x > 3$ — множина розв'язків заданої нерівності. Звичайно, її можна записати і так: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. $\triangleleft$



2. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей

Складніші логарифмічні нерівності розв'язуються за допомогою або рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

1) ***ураховуємо ОДЗ заданої нерівності;***

2) ***стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках зі збереженням правильності нерівності.***

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).