Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності

Деякі показникові та логарифмічні рівняння можна розв’язати, застосовуючи властивості відповідних функцій. Нагадаємо основні прийоми, які використовують під час розв’язування рівнянь за допомогою властивостей функцій, та наведемо приклади розв’язування рівнянь і нерівностей, що містять показникові, логарифмічні та інші функції.

Таблиця

Орієнтир	Приклад
1. Скінчення ОДЗ	
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв’язування достатньо перевірити всі ці значення.	$2^{\sqrt{x-1}}+3^x=4^{1-\sqrt{2-2x}}$. ► ОДЗ: $\begin{cases} x-1\ge 0, \\ 2-2x\ge 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x\ge 1, \\ x\le 1. \end{cases}$ Отже, ОДЗ: $x=1$. Перевірка: $x=1$ — корінь ($2^{\sqrt{1-1}}+3^1=4^{1-\sqrt{2-2}}$; $4=4$). Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число. *Відповідь*: 1. ◁
2. Оцінка лівої і правої частин рівняння	
$\boxed{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix} f(x)\ge a \\ g(x)\le a \end{matrix}}$ **Якщо потрібно розв’язати рівняння виду $f(x)=g(x)$, і $f(x)\ge a$, $g(x)\le a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді й тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють *a*.**	$2^{x^2}=\cos\frac{x}{2}$. ► Оцінимо значення лівої і правої частин заданого рівняння: • якщо $f(x)=2^{x^2}$, то $f(x)\ge 1$ (оскільки $x^2\ge 0$); • якщо $g(x)=\cos\frac{x}{2}$, то $-1\le g(x)\le 1$. Отже, $f(x)\ge 1$, $g(x)\le 1$. Тоді задане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} 2^{x^2}=1, \\ \cos\frac{x}{2}=1. \end{cases}$ Із першого рівняння одержуємо $x^2=0$, тобто $x=0$, що задовольняє друге рівняння. *Відповідь*: 0. ◁
3. Використання монотонності функцій	

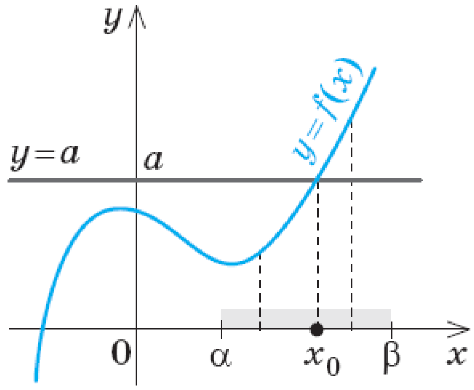
<table>
<tr><td colspan="2">

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або кілька коренів рівняння.*

2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку значень лівої та правої частин рівняння).*

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Теореми про корені рівняння</td></tr>
<tr><td>



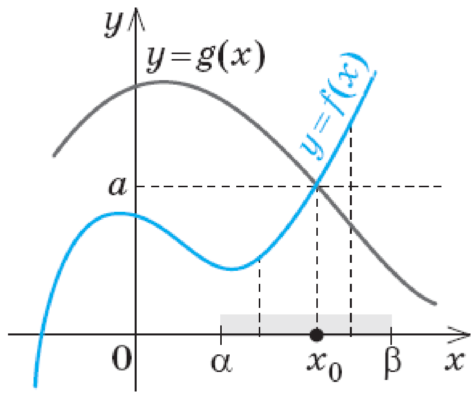
</td><td>

1. Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $2^x+3^x=5$ має єдиний корінь $x=1$ ($2^1+3^1=5$, тобто $5=5$), оскільки функція $f(x)=2^x+3^x$ зростає на всій області визначення $(x\in \boldsymbol{R})$ як сума двох зростаючих функцій.

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

2. Якщо в рівнянні $f(x)=g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $5^x=27-x$ має єдиний корінь $x=2$ ($5^2=27-2$, тобто $25=25$), оскільки функція $f(x)=5^x$ зростає, а функція $g(x)=27-x$ спадає (при всіх $x\in \boldsymbol{R}$).

</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. «Шукайте квадратний тричлен»</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>

Спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).

</td><td>

$$4^x-(7-x)\cdot 2^x+12-4x=0.$$

▶ Запишемо: $4^x=2^{2x}$ і виконаємо заміну $2^x=t$. Одержуємо:

$$t^2-(7-x)\cdot t+12-4x=0.$$

Розглянемо це рівняння як квадратне відносно *t*. Його дискримінант

</td></tr>
</table>

	$D=(7-x)^2-4(12-4x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$. Тоді $t_{1,2}=\frac{7-x\pm(x+1)}{2}$, тобто $t_1=4$, $t_2=3-x$. Виконавши обернену заміну, отримаємо: $2^x=4$ (звідси $x=2$) або $2^x=3-x$. Останнє рівняння має єдиний корінь $x=1$, оскільки функція $f(x)=2^x$ зростає, а функція $g(x)=3-x$ спадає (при всіх $x\in\boldsymbol{R}$). *Відповідь*: 1; 2. ◁

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$.

Розв'язання	**Коментар**
► Якщо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=t$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$. Одержуємо $t+\frac{1}{t}=4$. Отже, $t^2-4t+1=0$. Тоді $t_1=2-\sqrt{3}$, $t_2=2+\sqrt{3}$. Виконавши обернену заміну, отримаємо: $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}$ (звідси $x=2$) або $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}$ (звідси $x=-2$). *Відповідь*: –2; 2. ◁	Помічаємо, що $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$. Отже, якщо $\sqrt{2-\sqrt{3}}=a$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{a}$. Тобто задане рівняння має вигляд $a^x+\frac{1}{a^x}=4$ і його можна розв'язати за допомогою заміни $a^x=t$. Але тепер змінну t можна безпосередньо використати для заданого рівняння, не вводячи проміжні позначення. Виконавши обернену заміну, враховуємо, що $2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}$.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}+2^x-\frac{1}{2^x}=4$.

Коментар

Якщо звести всі степені до однієї основи 2 і позначити $2^x=t$, то одержимо рівняння (1) (див. **розв'язання**), у якому можна виконати заміну $t-\frac{1}{t}=u$ (тоді $u^2=t^2-2+\frac{1}{t^2}$, отже,

$t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$). На ОДЗ заданого рівняння $(x\in \boldsymbol{R})$ виконання усіх замін і обернених замін є рівносильними перетвореннями цього рівняння. Отже, розв'язавши рівняння, одержані в результаті замін, і виконавши обернені заміни, ми отримаємо корені заданого рівняння.

Розв'язання

► $2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}+2^x-\frac{1}{2^x}=4$.

Виконаємо заміну $2^x=t$, одержимо:

$$t^2+\frac{1}{t^2}+t-\frac{1}{t}=4. \qquad (1)$$

Позначимо $t-\frac{1}{t}=u$, тоді $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$, отже, з рівняння (1) одержуємо рівняння $u^2+u-2=0$, яке має корені: $u_1=1$, $u_2=2$.

Виконавши обернену заміну, отримаємо: $t-\frac{1}{t}=1$ або $t-\frac{1}{t}=-2$. Тоді $t^2-t-1=0$ або $t^2+2t-1=0$.

Одержуємо: $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ або $t_3=-1+\sqrt{2}$, $t_4=-1-\sqrt{2}$.

Тоді $2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (звідси $x=\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), або $2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (коренів немає, оскільки $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$), або $2^x=-1+\sqrt{2}$ (звідси $x=\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)$), або $2^x=-1-\sqrt{2}$ (коренів немає, оскільки $-1-\sqrt{2}<0$).

Відповідь: $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_2\left(\sqrt{2}-1\right)$. ◁

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}=2\cos 2x$.

I спосіб

Коментар

Ураховуючи, що $4^x>0$, одержуємо, що в лівій частині рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел, яка завжди більша або дорівнює* 2. (Дійсно, якщо $a>0$, то $a+\frac{1}{2}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$, отже, при всіх $a>0$ маємо: $a+\frac{1}{a}\geq 2$.)

Для оцінки значень правої частини достатньо згадати, що областю значень функції $\cos 2x$ є проміжок $[-1;1]$, отже, $-2\leq 2\cos 2x\leq 2$.

Розв'язання

► Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння. Якщо $f(x)=4^x+\frac{1}{4^x}$, то $f(x)\ge 2$ як сума двох взаємно обернених додатних чисел. Якщо $g(x)=2\cos 2x$, то $-2\le g(x)\le 2$.

Отже, $f(x)\ge 2$, $g(x)\le 2$, тоді задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 4^x+\frac{1}{4^x}=2, \\ 2\cos 2x=2. \end{cases}$$

З першого рівняння, використовуючи заміну $4^x=t$, одержуємо $t+\frac{1}{t}=2$, тобто $t^2-2t+1=0$. Звідси $t=1$.

Тоді $4^x=1$, отже, $x=0$, що задовольняє й друге рівняння.

Відповідь: 0. ◁

<u>II спосіб</u>

Коментар

Якщо позначити $4^x=t$, то задане рівняння зводиться до рівняння (2) (див. **розв'язання**), яке можна розглядати як квадратне відносно змінної *t*. Зауважимо, що $t=4^x\ne 0$, отже, при таких значеннях *t* рівняння (1) і (2) є рівносильними. Далі використовуємо умову існування коренів квадратного рівняння.

Розв'язання

► Виконавши заміну $4^x=t$ $(t>0)$, із заданого рівняння одержуємо рівносильне рівняння

$$t+\frac{1}{t}=2\cos 2x, \qquad (1)$$

яке, у свою чергу, рівносильне рівнянню

$$t^2-(2\cos 2x)t+1=0. \qquad (2)$$

Розглянемо рівняння (2) як квадратне відносно змінної *t*. Тоді його дискримінант $D=4\cos^2 2x-4$.

Рівняння (2) може мати корені тільки тоді, коли $D\ge 0$, тобто коли $4\cos^2 2x-4\ge 0$, тоді

$$\cos^2 2x\ge 1. \qquad (3)$$

У цій нерівності знак «більше» не може виконуватися ($\cos^2 2x\le 1$ завжди), отже, нерівність (3) рівносильна рівнянню $\cos^2 2x=1$. Тоді $\cos 2x=1$ або $\cos 2x=-1$. Підставляючи ці значення в рівняння (2), одержуємо дві системи рівнянь:

$$\begin{cases} \cos 2x=1, \\ t^2-2t+1=0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \cos 2x=-1, \\ t^2+2t+1=0. \end{cases}$$

З другого рівняння маємо $t=-1$, що не задовольняє умову $t>0$. Отже, задане рівняння рівносильне тільки першій системі рівнянь. З другого рівняння першої системи маємо $t=1$, тоді $4^x=1$, тобто $x=0$, що задовольняє й перше рівняння цієї системи.

Відповідь: 0. ◁

Приклад 4. Розв'яжіть рівняння $2^{|x|}-\left|2^{x+1}-2\right|=2^{x+1}$.

Коментар

Для розв'язування рівняння, що містить кілька модулей, можемо використати загальну схему, розглянуту в § 8 підручника для 10 класу:

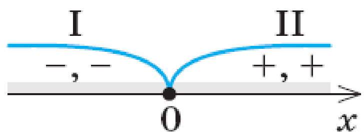
1) знайти ОДЗ;
2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
3) позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;
4) знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.

Розв'язання

► ОДЗ: $x\in\boldsymbol{R}$.

Нулі підмодульних функцій: $x=0$ і $2^{x+1}-2=0$; $2^{x+1}=2$; $x+1=0$; $x=0$.

Цей нуль $(x=0)$ розбиває ОДЗ на два проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має сталий знак (рисунок).



Проміжок I. Якщо $x\in(-\infty;0]$, маємо рівняння $2^{-x}+2^{x+1}-2=2^{x+1}$. Тоді $2^{-x}=2$, отже, $x=-1$, $-1\in(-\infty;0]$.

Проміжок II. Якщо $x\in[0;+\infty)$, маємо рівняння $2^x-\left(2^{x+1}-2\right)=2^{x+1}$. Тоді $2^x=\frac{2}{3}$, звідси $x=\log_2\frac{2}{3}$. Але $\log_2\frac{2}{3}<0$, отже, у *проміжку II* задане рівняння коренів не має.

Відповідь: –1. ◁

Приклад 5. Розв'яжіть рівняння $\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\lg(x-1)+2\lg^2(x-1)$.

Розв'язання	**Коментар**
►ОДЗ: $\begin{cases}x+1>0,\\x-1>0.\end{cases}$ Тобто $x>1$. Оскільки $x=2$ не є коренем заданого	Якщо виконати заміну $\lg(x+1)=u$, $\lg(x-1)=v$, то одержимо *рівняння*

рівняння, то, якщо розділити обидві частини рівняння на $\lg^2(x-1)\neq 0$, одержимо рівносильне рівняння (на ОДЗ): $$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)}=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}+2.$$ Виконавши заміну $t=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$, отримаємо рівняння $t^2-t-2=0$, корені якого: $$t_1=-1,\ t_2=2.$$ Виконавши обернену заміну, одержуємо: $$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1 \text{ або } \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2.$$ Тоді на ОДЗ маємо рівносильні рівняння: $\lg(x+1)=-\lg(x-1)$ або $\lg(x+1)=2\lg(x-1)$; $\lg(x+1)=\lg(x-1)^{-1}$ або $\lg(x+1)=\lg(x-1)^2$; $x+1=\frac{1}{x-1}$ або $x+1=(x-1)^2$; $x^2-1=1$ або $x+1=x^2-2x+1$; $x^2=2$ або $x^2-3x=0$; $x=\pm\sqrt{2}$, або $x=0$, або $x=3$. Ураховуючи ОДЗ, одержуємо: $$x=\sqrt{2} \text{ або } x=3.$$ *Відповідь*: $\sqrt{2}$; 3. ◁	$u^2=uv+2v^2$, *усі члени якого мають однаковий сумарний степінь* — два. Нагадаємо, що таке рівняння *називають однорідним і розв'язують діленням обох частин на найвищий степінь однієї зі змінних*. Розділимо, наприклад, обидві частини на v^2 (тобто на $\lg^2(x-1)$). *Щоб не загубити корені рівняння під час ділення на вираз зі змінною, потрібно ті значення змінної, для яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо*. Значення *x*, при якому $\lg(x-1)=0$ (тоді $x-1=1$), тобто $x=2$, підставляємо в задане рівняння. Для реалізації одержаного плану розв'язування не обов'язково вводити змінні *u* і *v*, достатньо помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на $\lg^2(x-1)$, а вже потім увести нову змінну *t*. У кінці враховуємо, що всі перетворення були рівносильними на ОДЗ, отже, необхідно вибрати тільки ті зі знайдених розв'язків, які входять до ОДЗ.

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0$.

Коментар

Логарифмічні функції, які містяться у лівій частині заданого рівняння, набувають тільки невід'ємних значень.

Справді, на всій області визначення $1+\sqrt{x-2}\geq 1$, отже, $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geq 0$. Аналогічно, оскільки $1-\left|x^2-4\right|\leq 1$, то на своїй області визначення $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geq 0$. У цьому випадку сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді й тільки тоді, коли кожна з цих функцій дорівнює нулю.

Зауважимо, що, в процесі виконання переходу від заданого рівняння до системи рівнянь ОДЗ не змінюється, отже, її можна не записувати в явному вигляді. Під час розв'язування одержаних найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ теж ураховується автоматично, тому її можна взагалі не записувати до розв'язання.

Розв'язання

► Оскільки на всій області визначення $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\ge 0$ і $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\ge 0$, то задане рівняння рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases}\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)=0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.\end{cases}$$

З першого рівняння системи одержуємо $1+\sqrt{x-2}=2^0$. Тоді $\sqrt{x-2}=0$, тобто $x=2$, що задовольняє й друге рівняння системи.

Відповідь: 2 ◁

Приклад 7. При яких значеннях параметра a нерівність

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

виконується для будь-яких значень x?

Коментар

Спочатку скористаємося формулою $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin x\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

Потім запишемо праву частину нерівності як значення логарифмічної функції і, переходячи до аргументів, урахуємо, що у випадку, коли основа цієї функції більша за 1, функція зростає, а коли менша від 1 (але більша за 0) — спадає. Також урахуємо ОДЗ заданої нерівності.

Аналізуючи далі одержані нерівності, ураховуємо, що нерівність $\sin t>b$ виконується для будь-яких значень t тоді й тільки тоді, коли $b<-1$, а нерівність $\sin t<c$ — коли $c>1$.

Розв'язання

► Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}\right)>\log_{\frac{2a-15}{5}}1.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності систем нерівностей:

$$\begin{cases}\frac{2a-15}{5}>1,\\ \frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1\end{cases} \text{ або } \begin{cases}0<\frac{2a-15}{5}<1,\\ 0<\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}<1.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases}a>10,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>5-\frac{a}{2}\end{cases}$ або $\begin{cases}7,5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<5-\frac{a}{2}.\end{cases}$

Нерівності зі змінною x в останній сукупності систем виконуватимуться для будь-яких значень x за умов:

$\begin{cases}a>10,\\ 5-\frac{a}{2}<-1\end{cases}$ або $\begin{cases}7,5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<-1,\\ 5-\frac{a}{2}>1.\end{cases}$ Тобто $\begin{cases}a>10,\\ a>12\end{cases}$ або $\begin{cases}7,5<a<10,\\ a>7,\\ a<8.\end{cases}$

Тоді $a>12$ або $7,5<a<8$.

Відповідь: $a\in(7,5:8)\cup(12;\infty)$. $\triangleleft$

Приклад 8. При яких значеннях параметра *a* рівняння $\log_2\left(4^x-a\right)=x$ має єдиний корінь?

Коментар

Виконуючи рівносильні перетворення заданого рівняння, як завжди, ураховуємо, що в процесі використання означення логарифма для розв’язування цього найпростішого логарифмічного рівняння його ОДЗ ураховується автоматично.

Виконуючи заміну змінної в завданні з параметром, ураховуємо, що при цьому вимога задачі може змінитися.

Досліджуючи розміщення коренів квадратного тричлена $f(t)=t^2-t-a$ відносно заданих чисел, застосовуємо умови, наведені в інтернет-підтримці до п. 9.3 підручника для 10 класу (для запису відповідних умов використаємо позначення: D — дискримінант, t_0 — абсциса вершини параболи). Як відомо, для того щоб корені квадратного тричлена $f(t)$ (з додатним коефіцієнтом при t^2) були розміщені по різні боки від числа A, необхідно й достатньо виконання умови $f(A)<0$.

Розв’язання

► Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$4^x - a = 2^x. \qquad (1)$$

Тобто $2^{2x} - a = 2^x$. Виконаємо заміну $2^x = t$ $(t > 0)$, Одержимо:

$$t^2 - t - a = 0. \qquad (2)$$

Вимога задачі буде виконуватися тоді й тільки тоді, коли рівняння (2) матиме єдиний додатний корінь. Це можливо в одному з двох випадків:

1) рівняння (2) має єдиний корінь, і він додатний;

2) рівняння (2) має два корені, з яких тільки один додатний, а другий — від’ємний або нуль.

Для першого випадку одержуємо $\begin{cases} D = 0, \\ t_0 > 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 1 + 4a = 0, \\ t_0 = \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$ Отже, $a = -\frac{1}{4}$.

Для другого випадку значення $t = 0$ дослідимо окремо.

Якщо $t = 0$, з рівняння (2) одержуємо $a = 0$. Якщо $a = 0$, рівняння (2) має корені $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Отже, умова задачі при $a = 0$ виконується.

Залишається ще один випадок — корені рівняння (2) мають різні знаки (розміщені по різні боки від нуля). Це буде тоді й тільки тоді, коли виконуватиметься умова $f(0) < 0$ (де $f(t) = t^2 - t - a$), тобто умова $-a < 0$, отже, $a > 0$. Об’єднуючи всі одержані результати, маємо відповідь.

Відповідь: якщо $a = -\frac{1}{4}$ або $a \geq 0$, задане рівняння має єдиний корінь. ◁

Запитання

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв’язування показникових і логарифмічних рівнянь.

Вправи

У завданнях 1–9 розв’яжіть рівняння.

1. 1) $2^{2x} = 5 - x$; 4) $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$; 7) $\log_2|x| = 5 - x^2$;

2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$; 5) $\log_3(x+5) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4$; 8) $\log_2(1 + x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$;

3) $3^x + 4^x = 5^x$; 6) $\log_2(3^x + 4) = 2 - 5^x$; 9) $\log_5 x = \sqrt{1 - x^2}$.

2. 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$;   3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=2^x$.

   2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x=6$;

3. 1) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$;

   2) $x^2+(x-3)\log_2 x=4x-3$;

   3) $2\lg^3(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\lg(2x+1)$.

4. 1) $2^{|x+2|}-\left|2^{x+1}-1\right|=2^{x+1}+1$;   2) $\left|2+\log_{\frac{1}{5}} x+3\right|=\left|1+\log_5 x\right|$.

5. 1) $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$;   2) $\sqrt{4^x-6\cdot 2^x+1}=2^x-a$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

   1) $\begin{cases} x+2^x=y+2^y, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x-\log_2 y=y-x, \\ x^3+y^3=54. \end{cases}$

7. Знайдіть усі значення параметра *a*, при яких рівняння $4^x+a\cdot 2^{x+1}-a=0$ не має коренів.

8. Знайдіть усі значення параметра *a*, при яких нерівність $a\cdot 9^x+4(a-1)\cdot 3^x+a>1$ виконується при всіх *x*.

9. Знайдіть усі значення параметра *a*, при яких рівняння $3^x+3^{-x}=2\cos x+a+4$ має єдиний корінь.

10. Знайдіть усі значення параметра *a*, при яких рівняння $\log_3\left(9^x+a\right)=x$ має єдиний корінь.

11. Для кожного значення параметра *a* визначте число коренів рівняння $|\lg x|=-(x-1)^2+a$.

12. Скільки розв'язків має рівняння $\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра *a*?

13. Знайдіть усі значення параметра *a*, при яких система рівнянь $\begin{cases} \lg(4+y)=\lg x, \\ a-y=\dfrac{1}{2}(x+a)^2 \end{cases}$ має розв'язки.