

Обґрунтування формули похідної функції $y = \sqrt[n]{x}$

Спираючись на формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, обґрунтуємо також формулу

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (1)$$

яку можна використовувати при тих значеннях x , при яких визначена її права частина.

• Якщо n — парне число, то ОДЗ правої частини формули (1): $x > 0$. Але за цієї умови

$$(\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \quad (2)$$

Якщо n — непарне число, то ОДЗ правої частини формули (1): $x \neq 0$. При $x > 0$ залишається справедливою рівність (2), при $x < 0$ врахуємо, що $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ і $-x > 0$, а також те, що при непарному n число $(1-n)$ буде парним (тому $(-1)^{1-n} = 1$).

Тоді

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= (-\sqrt[n]{-x})' = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)' = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(-x)^{1-n}} = \\ &= \frac{1}{n} \sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Отже, для непарного n при всіх $x \neq 0$ формула (1) теж виконується. ◦

В останньому випадку такі громіздкі перетворення довелося виконувати через те, що при $x < 0$ вираз $x^{\frac{1}{n}}$ не означений, а вираз $(-x)^{\frac{1}{n}}$ існує, оскільки $-x > 0$ при $x < 0$.

Приклади розв'язування завдань

Приклад 3. Виконайте завдання:

1) побудуйте графік функції $y = \frac{\ln x}{x}$;

2*) знайдіть найбільше значення параметра a , при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь.

Коментар

Для розв'язування завдання 1 досліджуємо функцію $y = \frac{\ln x}{x}$ за загальною схемою, і за результатами дослідження будемо її графік. Під час дослідження функції на парність і непарність можна скористатися тим, що в парної або непарної функції до області визначення входять точки x і $(-x)$. Отже, для таких функцій область визначення має бути симетричною відносно точки 0. Якщо ж ця умова не виконується, то функція не може бути ні парною, ні непарною.

Для кращого уявлення про вигляд графіка доцільно уточнити поведінку функції на кінцях області визначення ($D(y)=(0; +\infty)$). При $x \rightarrow 0$ (справа, тобто при $x \rightarrow +0$) значення $\ln x \rightarrow -\infty$. Тоді $y = \frac{\ln x}{x} \rightarrow \left(\frac{-\infty}{+0}\right) \rightarrow -\infty$. Отже, пряма $x=0$ — вертикальна асимптота, і це потрібно врахувати під час побудови графіка функції. Але при $x \rightarrow +\infty$ ми не можемо виконати таку оцінку (одержуємо невизначеність виду $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$). У такому випадку поведінку функції при $x \rightarrow +\infty$ можна уточнити за допомогою додаткових контрольних точок.

Під час розв'язування завдання 2 доцільно використати графічну ілюстрацію розв'язування. Це можна зробити двома способами.

I. За допомогою рівносильних перетворень привести задане рівняння до виду $f(x)=a$ (де $f(x)=\frac{\ln x}{x}$) і, використовуючи графік, побудований і результаті виконання завдання 1, з'ясувати, скільки коренів має рівняння $f(x)=a$ при різних значеннях параметра a .

II. Застосувати графічне розв'язування безпосередньо до рівняння $\ln x = ax$ (графіки функцій $y = \ln x$ і $y = ax$ відомі), а для дослідження єдиності кореня використати геометричний зміст похідної.

Розв'язання

► 1) Дослідимо функцію $y = \frac{\ln x}{x}$.

1. Область визначення: $x > 0$, тобто $D(y)=(0; +\infty)$.

2. Функція ні парна, ні непарна, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.

3. Точки перетину графіка з осями координат:

• графік не перетинає вісь Oy ($x \neq 0$);

• на осі Ox $y=0$, тобто $\frac{\ln x}{x}=0$, тоді при $x > 0$ одержуємо: $\ln=0$; $x=1$ — абсциса

точки перетину графіка з віссю Ox .

4. Похідна і критичні точки:

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)'x - x' \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (тобто при $x > 0$), отже, функція неперервна на всій області визначення.

Знаходимо критичні точки: $y'=0$. Тоді $\frac{1-\ln x}{x^2}=0$. Звідси при $x > 0$ одержуємо

$\ln x=1$, отже, $x=e$ — критична точка.

5. Позначаємо критичні точки на області визначення функції і знаходимо знак $y'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 4.2.1).

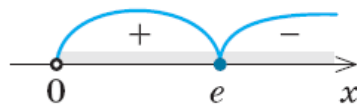


Рис. 4.2.1

Складаємо таблицю, у якій позначаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції.

x	$(0; e)$	e	$(e; +\infty)$
$y'(x)$	+	0	-
$y(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘
		max	

6. Знаходимо ще декілька точок графіка функції.

x	$\frac{1}{e} \approx 0,4$	$e^2 \approx 7,4$	$e^3 \approx 20,1$
$y(x)$	$-e \approx -2,7$	$\frac{2}{e^2} \approx 0,3$	$\frac{3}{e^3} \approx 0,1$

7. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = \frac{\ln x}{x}$ (рис. 4.2.2).

І спосіб розв'язування завдання 2

Область допустимих значень рівняння $\ln x = ax$ задається нерівністю $x > 0$. Але тоді $x \neq 0$ і задане рівняння на його ОДЗ рівносильне рівнянню $\frac{\ln x}{x} = a$.

Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графіки функцій $y = \frac{\ln x}{x}$ (див. завдання 1) та $y = a$ (рис. 4.2.3).

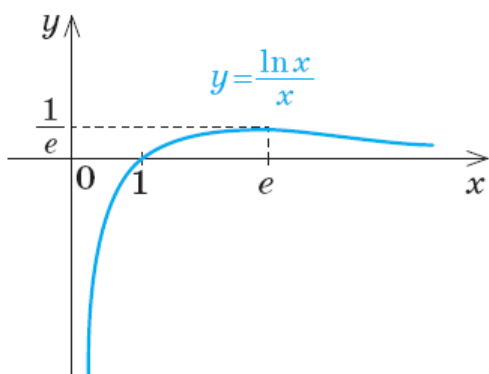


Рис. 4.2.2

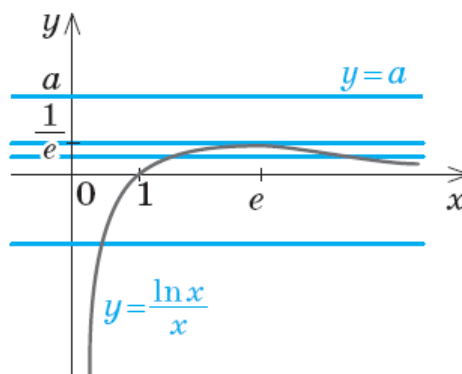


Рис. 4.2.3

Як бачимо, рівняння $\frac{\ln x}{x} = a$ має єдиний корінь тільки при $a \leq 0$ та при $a = \frac{1}{e}$ (при $0 < a < \frac{1}{e}$ рівняння має два корені, а при $a > \frac{1}{e}$ рівняння не має коренів).

Отже, найбільше значення параметра a , при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь, — це $a = \frac{1}{e}$.

II спосіб розв'язування завдання 2

Розглянемо графічну ілюстрацію (рис. 4.2.4) розв'язування заданого рівняння

$$\ln x = ax. \quad (1)$$

Функція $y = \ln x$ зростаюча і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Графіком функції $y = ax$ є пряма, яка проходить через початок координат.

При $a < 0$ пряма $y = ax$ перетинає графік функції $y = \ln x$ тільки в одній точці (пряма 1 на рис. 4.2.4). Отже, рівняння (1) має єдиний корінь (дійсно, функція $y = \ln x$ зростаюча, а функція $y = ax$ — спадна, і тому рівняння (1) може мати тільки єдиний корінь).

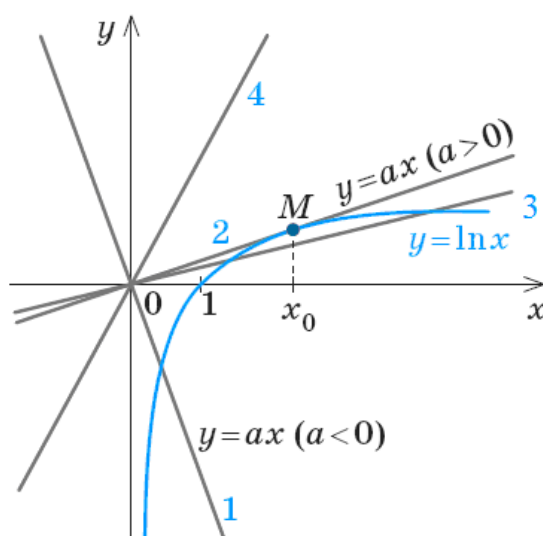


Рис. 4.2.4

При $a = 0$ рівняння (1) має вигляд $\ln x = 0$ і теж має єдиний корінь ($x = 1$).

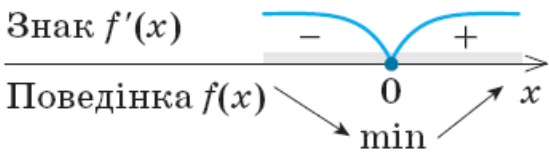
При $a > 0$ пряма $y = ax$ може дотикатися до графіка функції $y = \ln x$ (пряма 2 на рис. 4.2.4). Тоді рівняння (1) буде мати єдиний корінь. Пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті нижче дотичної (пряма 3 на рис. 4.2.4). Тоді рівняння (1) буде мати два корені. Також пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті вище дотичної (пряма 4 на рис. 4.2.4), тоді рівняння (1) не буде мати коренів.

З'ясуємо, коли пряма $y = ax$ буде дотичною до графіка функції $y = f(x) = \ln x$. Нехай точка дотику M має абсцису x_0 . Ураховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що

$f'(x_0)=a$ (значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної через точку M). Оскільки $f'(x)=\frac{1}{x}$, то $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$. Тоді з рівності $f'(x_0)=a$ маємо $\frac{1}{x_0}=a$. Звідси $x_0=\frac{1}{a}$. Тоді $y_0=\ln\frac{1}{a}$. До того ж, оскільки точка дотику M лежить і на дотичній $y=ax$, то її координати задовольняють рівняння дотичної. Одержуємо $\ln\frac{1}{a}=a\frac{1}{a}$, звідси $\ln\frac{1}{a}=1$. Тоді $\frac{1}{a}=e$, $a=\frac{1}{e}$.

Отже, задане рівняння матиме єдиний корінь тільки при $a<0$ і при $a=\frac{1}{e}$. Тоді найбільше значення параметра a , при якому рівняння $\ln x=ax$ має єдиний корінь, — це $a=\frac{1}{e}$.

Приклад 4. Доведіть, що при всіх дійсних значеннях x виконується нерівність $e^x \geq 1+x$.

Розв'язання	Коментар
<p>► Розглянемо функцію</p> $f(x)=e^x-1-x.$ <p>Область визначення: $D(f)=\mathbf{R}$.</p> <p>Похідна $f'(x)=e^x-1$ існує на всій області визначення. Отже, функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій; $f'(x)=0$, $e^x-1=0$, $e^x=1$, $x=0$ — критична точка.</p> <p>Позначаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$, знаходимо знаки похідної та визначаємо поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 4.2.5).</p> <div style="text-align: center;">  <p>Знак $f'(x)$ $-$ $+$</p> <p>Поведінка $f(x)$ \searrow \nearrow</p> <p> 0 x</p> <p> \min</p> </div> <p>Рис. 4.2.5</p> <p>Як бачимо, неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ тільки одну критичну точку, і це точка мінімуму. Отже, у цій точці</p>	<p>Використаємо похідну для доведення заданої нерівності. Для цього дослідимо функцію $f(x)$, яка є різницею лівої і правої частин нерівності.</p> <p>Спробуємо в результаті дослідження знайти найбільше чи найменше значення функції $f(x)$ на всій числовій прямій. Для цього можна використати таку властивість: <i>якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0</i>. Далі користуємося тим, що коли в точці x_0 функція набуває найменшого значення на заданому інтервалі, то для всіх значень x із цього інтервалу $f(x) \geq f(x_0)$ (якщо необхідно, то можна уточнити, що знак рівності досягається тільки в точці x_0).</p>

<p>функція набуває свого найменшого значення на цьому інтервалі. Тоді при всіх дійсних значеннях x значення $f(x) \geq f(0) = 0$, тобто $e^x - 1 - x \geq 0$. Отже, $e^x \geq 1 + x$ при всіх дійсних значеннях x. \triangleleft</p>	
--	--

В процесі доведення числових нерівностей або порівняння двох чисел часто буває зручним перейти до більш загальної функціональної нерівності.

Приклад 5*. Порівняйте числа π^e і e^π .

Коментар

Щоб скласти план розв'язування, можна міркувати так. Ми не знаємо, яке із заданих чисел більше: π^e або e^π , тому для аналізу поставимо між ними « \vee » — знак нерівності, напрямлений гострим кінцем униз. Це свідчить про те, що ми не знаємо, у який бік його треба направити. Будемо виконувати перетворення нерівності доти, поки не з'ясуємо, яке число більше. Потім знак « \vee » замінимо відповідним знаком нерівності (« $>$ » або « $<$ »), який і запишемо в розв'язанні. (У процесі аналізу, якщо на якомусь кроці перетворень потрібно поміняти знак нерівності, знак « \vee » змінюють на знак « \wedge », а в запису розв'язання у відповідному місці змінюють знак нерівності.) Під час аналізу запис типу $\pi^e \vee e^\pi$ теж будемо називати нерівністю (але, звичайно, не в розв'язанні).

Розглянемо нерівність $\pi^e \vee e^\pi$. Це нерівність із додатними членами ($\pi > 0$ і $e > 0$), отже, обидві її частини можна прологарифмувати. Функція $\ln t$ зростаюча, тому після логарифмування обох частин за основою e знак нерівності не зміниться і ми одержимо нерівність $\ln(\pi^e) \vee \ln(e^\pi)$, тобто нерівність $e \ln \pi \vee \pi \ln e$. Оскільки $e\pi > 0$, то після ділення обох частин останньої нерівності на $e\pi$ знак нерівності не зміниться і ми одержимо нерівність $\frac{\ln \pi}{\pi} \vee \frac{\ln e}{e}$. Помічаємо, що в лівій і правій частинах останньої нерівності стоять значення однієї й тієї самої функції $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Дослідимо цю функцію за допомогою похідної на зростання і спадання. Далі, ураховуючи, що $\pi > e$, порівняємо одержані вирази, а потім і задані вирази (виконуючи всі ті самі перетворення, що й в процесі аналізу, тільки у зворотному порядку).

Розв'язання

► Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Її область визначення $x > 0$. Похідна

$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ існує на всій області визначення. З'ясуємо, коли $f'(x) = 0$: $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$, на

області визначення одержуємо рівносильне рівняння $\ln x = 1$, отже, $x = e$ — критична точка. Позначаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$, знаходимо знаки похідної і визначаємо поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 4.2.6).

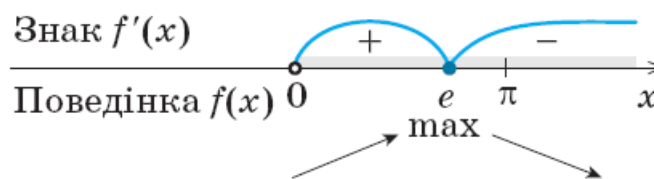


Рис. 4.2.6

Отже, в інтервалі $(e; +\infty)$ функція $f(x)$ спадає, а її неперервність на всій області визначення свідчить про те, що вона спадає на проміжку $[e; +\infty)$.

Оскільки $\pi > e$, то $f(\pi) < f(e)$, тобто $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$. Домноживши обидві частини цієї нерівності на додатне число πe (знак нерівності не змінюється), одержуємо нерівність $e \ln \pi < \pi \ln e$. Тоді $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Оскільки функція $\ln t$ зростаюча ($e > 1$), то $\pi^e < e^\pi$.

Відповідь: $\pi^e < e^\pi$. \triangleleft

Приклад 6* Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$.

Коментар

Якщо спробувати застосувати до заданого рівняння схему розв'язування показникових рівнянь (див. табл. 3 підручника), то зможемо реалізувати тільки перший її пункт — позбутися числових доданків у показниках степенів.

А от звести всі степені до однієї основи (зі зручними показниками) або до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння, або перенести всі члени в один бік і розкласти одержаний вираз на множники — не зможемо.

Спробуємо застосувати властивості відповідних функцій. Але і при такому підході (див., наприклад, § 4 підручника для 10 класу) ми не зможемо використати скінченність ОДЗ (вона нескінченна), оцінку лівої і правої частин рівняння (вони обидві лежать у межах від 0 до $+\infty$). Якщо сподіватися на можливість використання монотонності функції, то й тут ми не можемо застосувати теореми про корені (в обох частинах заданого рівняння стоять зростаючі функції).

Тоді спробуємо підібрати корені цього рівняння й довести, що інших коренів рівняння не має (зручно попередньо звести рівняння до виду $f(x) = 0$).

Послідовно підставляючи значення $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, з'ясуємо, що $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, тобто рівняння $f(x) = 0$ має три корені. Щоб довести, що інших коренів немає, достатньо довести, що функція $f(x)$ має не більше трьох проміжків зростання або спадання. Ураховуючи ж неперервність $f(x)$ на всій числовій прямій, достатньо довести, що

в неї не більше двох критичних точок, тобто рівняння $f'(x)=0$ має не більше двох коренів.

Розглядаючи тепер рівняння $f'(x)=0$, після його перетворення ми можемо провести аналогічні міркування, але вже для двох коренів (як це було зроблено в прикладі 2 до п. 36.1 в інтернет-підтримці до підручника 10 класу.)

Виконуючи перетворення рівняння $f'(x)=0$, урахуємо, що всі його члени мають однаковий степінь — x (тобто воно є однорідним відносно трьох функцій від змінної x), а саме: 2^x , 3^x , 4^x). Поділивши обидві частини рівняння $f'(x)=0$ на степінь з основою 2, 3 або 4 зменшимо кількість виразів зі змінною на один.

Розв'язання

► Задане рівняння рівносильне рівнянню $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$, тобто

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \quad (1)$$

Позначимо $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$. Оскільки $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$, $f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$, $f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$, то рівняння $f(x) = 0$ має три корені: 0, 1, 3. Доведемо, що інших коренів рівняння (1) не має. Для цього достатньо довести, що функція $f(x)$ має не більше трьох проміжків зростання або спадання, оскільки ж функція $f(x)$ на всій числовій прямій неперервна, достатньо довести, що функція має не більше двох критичних точок.

Область визначення: $D(f) = \mathbf{R}$.

Похідна $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ існує при всіх значеннях x . Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x , при яких $f'(x) = 0$. Одержуємо рівняння $8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0$.

Оскільки $3^x \neq 0$, то після ділення обох частин останнього рівняння на 3^x одержуємо рівносильне рівняння

$$8 \left(\frac{2}{3} \right)^x \ln 2 + 2 \left(\frac{4}{3} \right)^x \ln 4 - 7 \ln 3 = 0. \quad (2)$$

Щоб довести, що рівняння (2) має не більше двох коренів, достатньо довести, що функція $\varphi(x) = 8 \left(\frac{2}{3} \right)^x \ln 2 + 2 \left(\frac{4}{3} \right)^x \ln 4 - 7 \ln 3$ у лівій частині рівняння має не більше двох проміжків зростання або спадання. Ураховуючи неперервність цієї функції на всій числовій прямій, достатньо довести, що вона має тільки одну критичну точку. Дійсно, $\varphi'(x) = (8 \ln 2) \left(\frac{2}{3} \right)^x \ln \frac{2}{3} + (2 \ln 4) \left(\frac{4}{3} \right)^x \ln \frac{4}{3}$ існує при всіх значеннях x . Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x , при яких $\varphi'(x) = 0$. Одержуємо однорідне рівняння

$$(8\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \ln \frac{2}{3} + (4\ln 2)\left(\frac{4}{3}\right)^x \ln \frac{4}{3} = 0.$$

Оскільки $(4\ln 2)\left(\frac{2}{3}\right)^x \neq 0$, то після ділення обох частин рівняння на цей вираз

одержуємо рівносильне рівняння $2\ln \frac{2}{3} + 2^x \ln \frac{4}{3} = 0$. Звідси $2^x = \frac{-2\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{4}{3}}$. Ураховуючи, що

$\ln \frac{2}{3} < 0$, а $\ln \frac{4}{3} > 0$, одержуємо $\frac{-2\ln \frac{2}{3}}{\ln \frac{4}{3}} > 0$. Отже, останнє рівняння має єдиний корінь. Тоді

функція $\varphi(x)$ має єдину критичну точку і рівняння (2) має не більше двох коренів. Це означає, що функція $f(x)$ має не більше двох критичних точок. Тоді рівняння (1) (і задане рівняння) має не більше трьох коренів. Але три корені заданого рівняння ми вже знаємо: 0, 1, 3. Отже, інших коренів задане рівняння не має.

Відповідь: 0, 1, 3. \triangleleft