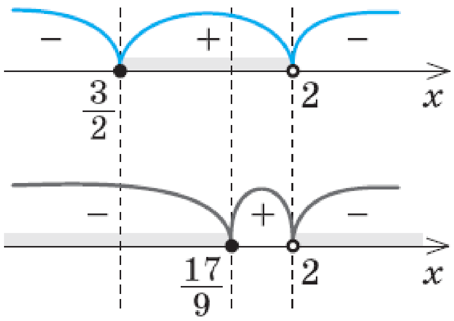
Приклад 2*. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > -1$.

Розв'язання	Коментар
► $\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$. (1) Ураховуючи ОДЗ заданої нерівності й те, що функція $y = \log_{\frac{1}{3}} t$ спадає, одержуємо $$0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \quad (2)$$ тобто $0 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < 3$. Тоді $\log_2 1 < \log_2 \frac{x-1}{2-x} < \log_2 2^3$. Ураховуючи, що функція $y = \log_2 t$ зростає, одержуємо $$1 < \frac{x-1}{2-x} < 2^3. \quad (3)$$ Ця нерівність рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} \frac{x-1}{2-x} > 1, \\ \frac{x-1}{2-x} < 8, \end{cases}$ яка, у свою чергу, рівносильна системі нерівностей $$\begin{cases} \frac{2x-3}{2-x} > 0, & (4) \\ \frac{9x-17}{2-x} < 0. & (5) \end{cases}$$ Розв'язуємо нерівності (4) і (5) методом інтервалів і знаходимо їх спільні розв'язки (див. рисунок): • для нерівності (4) ОДЗ: $x \neq 2$; $x = \frac{3}{2}$ — нуль функції $f(x) = \frac{2x-3}{2-x}$; • для нерівності (5) ОДЗ: $x \neq 2$; $x = \frac{17}{9}$ — нуль функції $g(x) = \frac{9x-17}{2-x}$.	ОДЗ заданої нерівності запишемо у вигляді системи нерівностей $$\begin{cases} \log_2 \frac{x-1}{2-x} > 0, & (6) \\ \frac{x-1}{2-x} > 0. & (7) \end{cases}$$ Виконуючи рівносильні перетворення, головне — не записати ОДЗ, а врахувати її в процесі розв'язування. При переході від нерівності (1) до нерівності (2) у запису останньої нерівності залишається вираз $\log_2 \frac{x-1}{2-x}$, для якого ОДЗ: $\frac{x-1}{2-x} > 0$. Отже, при такому переході обмеження (7) буде неявно враховане, і тому достатньо врахувати тільки обмеження (6) (що й зроблено в лівій частині нерівності (2)). Щоб використати властивості відповідних логарифмічних функцій, записуємо необхідні числа як значення логарифмічної функції: спочатку $-1 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ (і враховуємо, що $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$), а потім $0 = \log_2 1$ і $3 = \log_2 2^3$. При переході від нерівності (2) до нерівності (3) одержуємо, що $\frac{x-1}{2-x} > 1$, отже, і в цьому випадку нерівність (7) урахована автоматично. Для знаходження спільних розв'язків нерівностей (4) і (5) зручно їх розв'язання методом інтервалів розмістити одне над одним так, щоб

 *Відповідь*: $\left(\frac{3}{2}; \frac{17}{9}\right)$. ◁	однаково позначені точки були розташовані одна над одною. Тоді за рисунком відразу визначимо спільні розв'язки системи нерівностей.