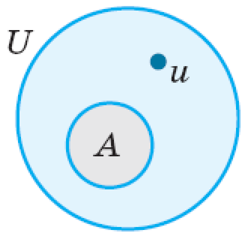
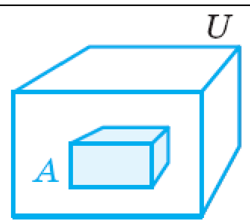
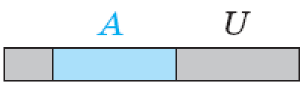
Геометричне означення ймовірності

Таблиця

<table>
<tr><th colspan="2">1. Основні поняття</th></tr>
<tr><td>
</td><td>U — деяка фігура на площині;
$S(U)$ — площа фігури U.
Експеримент — це випадковий вибір якоїсь точки u з фігури U (можна також вважати, що цю точку u випадково кинули на фігуру U).
Елементарні події u — точки фігури U.
A — частина фігури U $(A \subseteq U)$;
$S(A)$ — площа фігури A.
Подія A — попадання точок u у фігуру A. Тоді сприятливими елементарними подіями для події A будуть усі точки фігури A.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Означення геометричної ймовірності</th></tr>
<tr><td>$P(A)=\frac{S(A)}{S(U)}$</td><td>Геометричною ймовірністю події A називають відношення площі фігури, сприятливої для події A, до площі всієї заданої фігури.
(Припускаємо, що ймовірність попадання точки в частину фігури U пропорційна площі цієї частини й не залежить від її конфігурації і розміщення у фігурі U.)</td></tr>
<tr><th colspan="2">3. Загальне означення</th></tr>
<tr><td>



$P(A)=\frac{\text{міра } A}{\text{міра } U}$</td><td>Якщо U — просторова фігура (тіло), то під записами $S(U)$ і $S(A)$ розуміють об’єми тіла U і його частини — тіла A.
Якщо U — відрізок, то під записами $S(U)$ і $S(A)$ розуміють довжини відрізка U і його частини — відрізка A.
(Об’єм тіла U у просторі, площу плоскої фігури U на площині, довжину відрізка U на прямій назвемо мірою фігури U.)
Геометричною ймовірністю події A називають відношення міри фігури, сприятливої для події A, до міри всієї заданої фігури.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Наведене в п. 13.1 класичне означення ймовірності не можна застосувати до випадкових експериментів з нескінченною кількістю результатів (тобто у випадку, коли множина U нескінченна).

Розглянемо випадок задання ймовірностей $P(A)$ за допомогою так званих *геометричних ймовірностей*. Нехай U — деяка фігура на площині, $S(U)$ — її площа, A — частина фігури U з площею $S(A)$, B — частина фігури U з площею $S(B)$ (рис. 1).

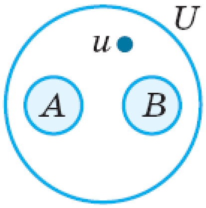


Рис. 1

Елементарною подією *u* будемо вважати деяку точку фігури U, випадково вибрану на фігурі U або кинуту на фігуру U. Подією A будемо вважати попадання точок *u* у фігуру A. Також будемо вважати такий випадковий вибір точок *рівномірним* (або, як кажуть, *розподіл ймовірностей рівномірний*). Іншими словами, ймовірності попадання точки *u* у фігури A і B, які мають однакові площі, однакові й не залежать від положення цих фігур (якщо $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ і $S(A) = S(B)$, то $P(A) = P(B)$). Тобто ми припускаємо, що ймовірність попадання точки в частину фігури U пропорційна тільки площі цієї частини і не залежить від її розміщення у фігурі U. Тоді ймовірність попадання точки *u* у фігуру A означається як відношення площ

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}. \tag{1}$$

Оскільки сприятливими елементарними подіями для розглянутої події є попадання вибраної точки у фігуру A, то фігуру A можна назвати сприятливою для цієї події, і тоді означення геометричної ймовірності можна сформулювати так.

Означення. ***Геометричною ймовірністю події A*** **називають відношення площі фігури, сприятливої для події *A*, до площі всієї заданої фігури.**

Приклад 1. Нехай кругла мішень радіуса 20 см поділена концентричними колами з радіусами $R_k = 2(10 - k)$, де $k = 1$, 2, ..., 9 на 10 кілець. Внутрішній круг радіуса $R_9 = 2$ теж назвемо кільцем і будемо вважати, що $R_{10} = 0$, а $R_0 = 20$ (рис. 2).

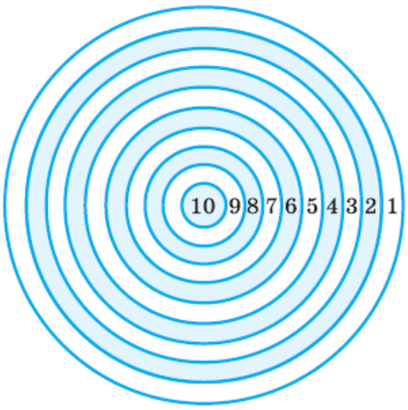


Рис. 2

Стрілець попав у мішень. Будемо вважати, що він вибив k очок, якщо попав у k-те кільце, тобто в кільце між колами радіусів R_{k-1} і R_k (або попав у коло радіуса R_{k-1}).

Позначимо подію A_k — «стрілець вибив k очок» і визначимо ймовірність кожної з таких подій при $k=1$, 2, ..., 9, 10.

► Якщо вважати, що у стрільця точки попадання куль рівномірно розподілені по кругу мішені, то можна використати геометричне означення ймовірності. Одержуємо $P(A_k)=\frac{S_{k\text{-го кільця}}}{S_{\text{мішені}}}$. Ураховуючи, що

$$S_{k\text{-го кільця}}=\pi R_{k-1}^2-\pi R_k^2=4\pi(11-k)^2-4\pi(10-k)^2=4\pi(21-2k)$$

і $S_{\text{мюшені}}=\pi R_0^2=400\pi$, маємо:

$$P(A_k)=\frac{21-2k}{100}, \text{ де } k=1, 2, ..., 9, 10. \triangleleft$$

Зауваження 1. Назвемо події A і B несумісними (подія A — точка попала у фігуру A, подія B — точка попала у фігуру B), якщо фігури A і B не мають спільних точок (тобто множини точок фігур A і B не мають спільних елементів). *Суму* подій $A+B$ і *добуток* $A\cdot B$ означимо як об’єднання $A\cup B$ і переріз $A\cap B$ множин точок фігур A і B.

Подію $\bar{A}$, *протилежну* до події A, означимо як доповнення $\bar{A}$ множини точок фігури A до множини U (тобто як множину всіх точок фігури U, які не входять до A).

Тоді наведене означення геометричної ймовірності задовольняє аксіоми 1–3, наведені в п. 13.3.

● Справді, $P(U)=\frac{S(U)}{S(U)}=1$, отже, аксіома 2 виконується.

За властивістю площі $S(A)\geqslant 0$, $S(U)>0$, отже, $P(A)\geqslant 0$. Ураховуючи, що $A\subseteq U$ (рис. 2), одержуємо, що $S(A)\leqslant S(U)$. Отже, $0\leqslant P(A)\leqslant 1$ (тобто аксіома 1 виконується).

Якщо події A і B несумісні, то фігури A і B не мають спільних точок. Тоді $S(A\cup B)=S(A)+S(B)$. Отже, $P(A+B)=\frac{S(A\cup B)}{S(U)}=\frac{S(A)+S(B)}{S(U)}=\frac{S(A)}{S(U)}+\frac{S(B)}{S(U)}=P(A)+P(B)$, тобто виконується й аксіома 3.

Оскільки різні означення ймовірності задовольняють одні й ті самі основні властивості (аксіоми), то наслідки, які можуть бути отримані з використанням цих аксіом, не залежать від способу означення ймовірності. Тому далі обґрунтування загальних властивостей ймовірностей ми будемо проводити для одного означення — або, як кажуть у математиці, для однієї ймовірнісної моделі, — і мати на увазі, що аналогічне обґрунтування можна провести й для інших моделей. Хоча, звичайно, у кожній моделі можна вказати й свої специфічні властивості, яких немає в інших моделях.

Зауваження 2. Означення геометричної ймовірності (і формулу (1)) можна використовувати не тільки в тому випадку, коли U — плоска фігура.

Якщо, наприклад, U — просторова фігура (тіло), то у випадку рівномірного розподілу ймовірностей (у тому розумінні, що ймовірності попадання точки *u* у частини даного тіла, що мають однакові об'єми, є однаковими і не залежать від положення цих частин у заданому тілі), у формулі (1) під записами $S(U)$ і $S(A)$ треба розуміти об'єми тіла U і його частини — тіла A.

Аналогічно, якщо U — відрізок, то у випадку рівномірного розподілу ймовірностей (у тому розумінні, що ймовірності попадання точки *u* у частини даного відрізка, які мають однакові довжини, є однаковими й не залежать від положення цих частин на заданому відрізку), у формулі (1) під записами $S(U)$ і $S(A)$ треба розуміти довжини відрізка U і його частини — відрізка A.

Зазначимо, що об'єм тіла U в просторі, площу плоскої фігури U на площині, довжину відрізка U на прямій можна назвати *мірою* фігури U. Тоді в загальному вигляді формулу (1) можна записати так:

$$P(A)=\frac{\text{міра } A}{\text{міра } U},$$

тобто в загальному випадку сформулюємо означення.

Означення. ***Геометричною ймовірністю події A*** **називається відношення міри фігури, сприятливої для події A, до міри всієї заданої фігури.**

Приклад 2. Оля пообіцяла подрузі Каті зателефонувати в проміжку від 9 до 10 год. Знайдіть ймовірність того, що їх розмова почнеться в проміжку від 9 год 20 хв до 9 год 25 хв.

► У цій задачі експеримент — це фіксування часу телефонного дзвінка. Зобразимо всі результати експерименту у вигляді відрізка AB (рис. 3).

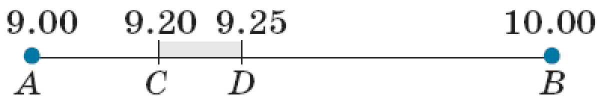


Рис. 3

Елементарні події — це точки відрізка AB (Оля може зателефонувати подрузі в будь-який час з 9.00 до 10.00). Якщо подія A — виклик відбувся в проміжку 9.20–9.25, то сприятливі для події A елементарні результати можна зобразити точками відрізка CD. Якщо вважати, що час виклику по домовленому проміжку розподіляється рівномірно, то

$$P(A)=\frac{\text{міра } CD}{\text{міра } AB}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}\approx 0{,}08\ . \ \triangleleft$$

(В обчисленні враховано, що у хвилинах міра CD дорівнює 5, а міра AB — 60 (1 год = = 60 хв).)

Приклад 3*. До сигналізатора надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного з сигналів рівноможливе в будь-який момент проміжку часу тривалістю *T* хв. Моменти надходження сигналів незалежні один від іншого.

Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша 1 хв. Знайдіть ймовірність того, що сигналізатор спрацьовує за час *T*, якщо кожний пристрій надішле по одному сигналу.

► Виберемо проміжок часу тривалістю *T*, наприклад $[0;T]$. Позначимо моменти надходження сигналів першого й другого пристроїв відповідно через x і y. З умови задачі випливає, що мають виконуватися подвійні нерівності $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Уведемо прямокутну систему координат *xOy* (рис. 4). У цій системі подвійні нерівності задовольняють координати будь-якої точки, що належить квадрату *OTCT*. Отже, цей квадрат можна розглядати як фігуру *G*, координати точок якої задають усі можливі значення моментів надходження сигналів.

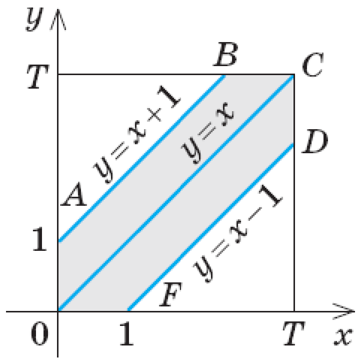


Рис. 4

Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менше 1 хв, тобто якщо $|y-x|<1$, що рівносильно нерівностям

$$y<x+1,\ \text{якщо}\ y>x, \qquad (2)$$

$$y>x-1,\ \text{якщо}\ y<x. \qquad (3)$$

Нерівності (2) виконуються для координат тих точок фігури *G*, які лежать вище від прямої $y=x$ і нижче від прямої $y=x+1$; нерівності (3) мають місце для координат точок, розташованих нижче від прямої $y=x$ і вище від прямої $y=x-1$.

Як видно з рис. 4, усі точки, координати яких задовольняють нерівності (2) і (3), належать зафарбованому шестикутнику *OABCDF*. Отже, цей шестикутник можна розглядати як фігуру *g*, координати точок якої є сприятливими моментами часу x і y для спрацьовування сигналізатора.

Ураховуючи, що площа

$$g = 2S_{OABC} = 2\cdot\left(S_{\triangle OTC} - S_{\triangle ATB}\right) = 2S_{\triangle OTC} - 2S_{\triangle ATB} = T^2 - (T-1)^2 = 2T-1,$$

одержуємо, що шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{\text{площа } g}{\text{площа } G} = \frac{2T-1}{T^2}. \triangleleft$$

Запитання

1. Поясніть, у чому полягає експеримент при геометричному означенні ймовірності.

2. Сформулюйте означення геометричної ймовірності. У яких випадках його можна використовувати? Наведіть приклади.

Вправи

1°. Єгор і Данило домовилися: якщо стрілка вертушки (рис. 5) зупиниться на білому полі, то огорожу буде фарбувати Єгор, а якщо на блакитному полі — Данило. У кого з хлопчиків більше шансів фарбувати огорожу?

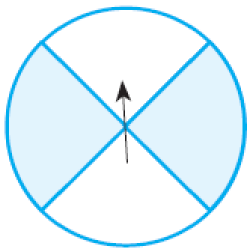


Рис. 5

2°. Два приятелі за допомогою вертушки (рис. 6) вирішують, як їм провести вихідний: якщо стрілка зупиниться на білому, вони підуть у кіно, якщо на блакитному — на стадіон. Яка з подій ймовірніша: приятелі підуть на стадіон чи в кіно?

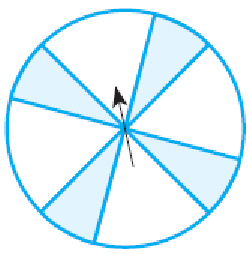
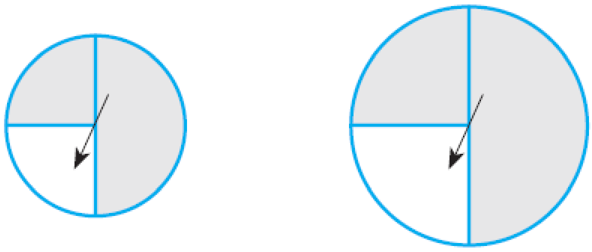


Рис. 6

3°. Ви виграєте, якщо стрілка вертушки зупиняється на білому. Яка з вертушок, зображених на рис. 7 і 8, дає вам більше шансів на виграш?



а *б*

Рис. 7

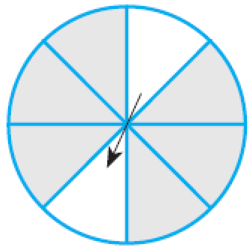


Рис. 8

4. У коло радіуса R вписано квадрат. У круг, обмежений заданим колом, навмання поставили точку. Знайдіть ймовірність того, що ця точка буде міститися всередині квадрата, вважаючи, що ймовірність попадання точки в частину круга пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розміщення в крузі.

5. У сферу радіуса R вписано куб. У кулю, обмежену заданою сферою, навмання кинули точку. Знайдіть ймовірність того, що ця точка буде міститися всередині куба, вважаючи, що ймовірність попадання точки в частину кулі пропорційна об’єму цієї частини і не залежить від її розміщення відносно кулі.

6. На відрізку L завдовжки 20 см розмістили менший відрізок l завдовжки 10 см. Знайдіть ймовірність того, що точка, навмання поставлена на більший відрізок, попаде на менший відрізок. Передбачається, що ймовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка й не залежить від його розміщення.

7*. *Задача про зустріч*. Два друга домовилися зустрітися в певному місці між 12 і 13 год. Той, хто прийде першим, буде чекати другого $\frac{1}{4}$ год, після чого покине місце зустрічі. Знайдіть ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен з друзів вибирає навмання момент свого прибуття (у проміжку від 12 до 13 год).

Вказівка. Для спрощення графічної ілюстрації будемо вважати, що зустріч може відбутися між 0 год і 1 год. Зручно позначити час прибуття першого друга на місце зустрічі через x, а другого — через y і ввести прямокутну систему координат xOy.