Біном Ньютона

Таблиця

Біном Ньютона

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + x^n .$$

Оскільки $1 = C_n^0 = C_n^n$ і $x^0 = 1$, $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ і $a \neq 0$), то формулу бінома Ньютона можна записати ще й так:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n .$$

Загальний член цього розкладу має вигляд $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$ (де $k = 0$, 1, 2, ..., n).

Коефіцієнти C_n^k називають *біноміальними коефіцієнтами*.

Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Число біноміальних коефіцієнтів (а отже, і число доданків у розкладі n-го степеня бінома) дорівнює $n+1$.

2. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку й кінця розкладу, рівні між собою (оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$).

3. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n .$$

4. Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.

5. Для обчислення біноміальних коефіцієнтів можна скористатися трикутником Паскаля, у якому обчислення коефіцієнтів ґрунтується на формулі $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Трикутник Паскаля

Степінь	**Коефіцієнти розкладу**	**Орієнтир**
$(a+x)^0$	1	*У кожному рядку по краях стоять одиниці, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним ліворуч і праворуч.*
$(a+x)^1$	1 1	
$(a+x)^2$	1 2 1	
$(a+x)^3$	1 3 3 1	
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
...	...	

Наприклад, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пояснення й обґрунтування

1. Біном Ньютона

Двочлен виду $a+x$ також називають біномом. З курсу алгебри відомо, що:

$(a+x)^1 = a+x = 1\cdot a+1\cdot x$;

$(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2 = 1\cdot a^2+2\cdot ax+1\cdot x^2$;

$(a+x)^3 = a^3+3a^2x+3ax^2+x^3 = 1\cdot a^3+3\cdot a^2x+3\cdot ax^2+1\cdot x^3$.

Можна помітити, що коефіцієнти розкладу степеня бінома $(a+x)^n$ при $n=1$, 2, 3 збігаються з відповідним рядком трикутника Паскаля. Виявляється, що ця властивість виконується й для довільного натурального *n*, тобто

$$(a+x)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}x + C_n^2a^{n-2}x^2 + C_n^3a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^ka^{n-k}x^k + \ldots + C_n^nx^n. \quad (1)$$

Формулу (1) називають *біномом Ньютона*. Праву частину цієї рівності називають розкладом степеня бінома $(a+x)^n$, а числа C_n^k (при $k=0$, 1, 2, ..., *n*) — *біноміальними коефіцієнтами*. **Загальний член розкладу** степеня бінома має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^ka^{n-k}x^k \text{ (де } k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

● Обґрунтувати формулу (1) можна, наприклад, за допомогою методу математичної індукції (зміст та алгоритм використання методу див. у § 6 підручника для 10 класу) — виконайте це обґрунтування самостійно. Наведемо також комбінаторні міркування для обґрунтування формули бінома Ньютона.

За означенням степеня з натуральним показником $(a+x)^n = (a+x)(a+x)\ldots(a+x)$ (всього *n* дужок). Розкриваючи дужки, одержуємо в кожному доданку добуток *n* букв, кожна з яких — *a* або *x*. Якщо, наприклад, у якомусь доданку кількість букв *x* дорівнює *k*, то кількість букв а в ньому дорівнює $n-k$, тобто кожний доданок має вигляд $a^{n-k}x^k$ при якомусь *k* від 0 до *n*. Доведемо, що для кожного такого *k* число доданків $a^{n-k}x^k$ дорівнює C_n^k, звідки, звівши подібні члени, і одержуємо формулу бінома.

Добуток $a^{n-k}x^k$ отримуємо, взявши букву *x* з *k* дужок і букву *a* з $n-k$ тих дужок, що залишилися. Різні такі доданки отримаємо шляхом різного вибору перших *k* дужок, а *k* дужок з *n* можна вибрати саме C_n^k способами. Отже, загальний член розкладу бінома $(a+x)^n$ дійсно має вид $C_n^ka^{n-k}x^k$, де $k=0$, 1, 2, ..., *n*. ○

Саме через біном Ньютона числа C_n^k часто називають *біноміальними коефіцієнтами*. Записуючи степінь двочлена за формулою бінома Ньютона для невеликих значень *n*, біноміальні коефіцієнти можна обчислювати за трикутником Паскаля (див. таблицю).

Наприклад, $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Ураховуючи, що ($C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу бінома Ньютона можна записати так:

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + x^n . \qquad (2)$$

Якщо в формулі бінома Ньютона (2) замінити x на $(-x)$, то одержимо формулу піднесення до степеня різниці $a-x$:

$$(a-x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 - C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + (-1)^n x^n .$$

Наприклад, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ (знаки членів розкладу чергуються!).

2. Властивості біноміальних коефіцієнтів

1. Число біноміальних коефіцієнтів (а отже, і число доданків) у розкладі n-го степеня бінома дорівнює $n+1$, оскільки розклад містить усі степені x від 0 до n (інших доданків не містить).

2. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку й кінця розкладу, рівні між собою, оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3. Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.

● Для обґрунтування підставимо в рівність (1) значення $a = x = 1$ й одержимо:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n .$$

Наприклад, $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1+5+10+10+5+1 = 32 = 2^5$.

4. Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.

● Для обґрунтування покладемо в рівності (1) значення $a=1$, $x=-1$ й одержуємо

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n .$$

Тоді

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots . \quad \circ$$

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1. За формулою бінома Ньютона знайдіть розклад степеня $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

Коментар

Для знаходження коефіцієнтів розкладу можна використати трикутник Паскаля (таблиця) або обчислити їх за загальною формулою. За трикутником Паскаля коефіцієнти дорівнюють: 1; 6; 15; 20; 15; 6; 1. Ураховуємо, що підносимо до степеня різницю, отже, знаки чергуються. Тоді

$$(a-b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Для спрощення запису відповіді можна позбутися в одержаних виразах від ірраціональності в знаменниках (як це зроблено в розв'язанні) або з самого початку врахувати, що ОДЗ заданого виразу: $x>0$, і тоді $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Отже, заданий вираз можна записати так: $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x - x^{-\frac{1}{2}}\right)^6$ і виконувати піднесення до степеня останнього виразу.

Розв'язання

► $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - 6x^5\frac{1}{\sqrt{x}} + 15x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 20x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 15x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 - 6x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 =$

$= x^6 - \frac{6x^5}{\sqrt{x}} + 15x^3 - \frac{20x^3}{x\sqrt{x}} + 15 - \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} = x^6 - 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 - 20x\sqrt{x} + 15 - \frac{6\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^3}$. ◁

Приклад 2. У розкладі $\left(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}$ знайдіть член, який містить b^3.

Розв'язання	Коментар
► ОДЗ: $b>0$. Тоді $\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16} = \left(b^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}$. Загальний член розкладу: $T_{k+1} = C_{16}^k\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k}\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^k = C_{16}^k b^{\frac{16-k}{2}-\frac{k}{3}}$. За умовою член повинен містити b^3, отже, $\frac{16-k}{2} - \frac{k}{3} = 3$. Звідси $k=6$. Тоді членом, що містить b^3, буде $T_{k+1} = T_7 = C_{16}^6 b^{\frac{16-6}{2}-\frac{6}{3}} = C_{16}^6 b^3 = \frac{16!}{6!(16-6)!}b^3 =$ $= \frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 8008b^3$. ◁	На ОДЗ $(b>0)$ кожен доданок у заданому двочлені можна записати як степінь з дробовим показником. Це дозволить простійте записати загальний член розкладу степеня $(a+x)^n$: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$, (де $k=0$, 1, 2, ..., n), з'ясувати, який із членів буде містити b^3, і записати такий член. Для спрощення запису загального члена зручно зазначити, що $a = \sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}}$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = b^{-\frac{1}{3}}$, $n=16$.

Запитання

1. а) Запишіть формулу бінома Ньютона. Наведіть приклади її використання.

б*) Доведіть формулу бінома Ньютона.

2*. Сформулюйте й доведіть властивості біноміальних коефіцієнтів.

Вправи

У завданнях 1–3 знайдіть розклад степенів біномів.

1. 1) $(x+a)^6$; 2) $(x+c)^4$; 3) $(x+2)^5$; 4*) $(1+a)^{12}$.

2. 1) $(x-a)^7$; 2) $(x^2-a)^6$; 3) $(a^2+1)^8$; 4*) $(a+\sqrt{b})^{11}$.

3. 1) $(\sqrt{m}-n)^5$; 2) $(x-2y)^5$; 3) $(3x+2y)^4$; 4) $(2a^2-3a)^5$; 5) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

4. Знайдіть:

1) четвертий член розкладу $(a+3)^7$;

2) дев'ятий член розкладу $(a+\sqrt{b})^{12}$;

3) шостий член розкладу $(a^2+b^3)^{13}$;

4) середній член розкладу $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^8$.

5. Знайдіть член розкладу бінома:

1) $(x+y)^9$, що містить x^7;

2) $(\sqrt{a}+b)^9$, що містить a^3;

3) $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a})^{20}$, що містить a^7;

4) $(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8})^{12}$, що містить $x^{\frac{22}{3}}$;

5) член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, що не містить a;

6) член розкладу $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, що не містить a.

6*. Знайдіть показник степеня бінома, якщо:

1) третій член розкладу $(\sqrt[3]{a^2}+a^{-1})^n$ містить a^0;

2) біноміальні коефіцієнти четвертого й шостого членів розкладу $(1+x)^{n+1}$ рівні між собою;

3) біноміальні коефіцієнти четвертого й шостого членів розкладу відповідно дорівнюють 120 і 252.

7*. Знайдіть показник степеня бінома, якщо:

1) шостий член розкладу $\left(a^{\frac{1}{30}}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ не містить a;

2) шостий член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}-\sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не залежить від a.