**До § 22. Додаткові формули тригонометрії.**
**Формули потрійного та половинного аргументів.**
**Вираження тригонометричних функцій**
**через тангенс половинного аргумента**

## Формула перетворення виразу $a\sin\alpha + b\cos\alpha$

*Таблиця*

| |
|---|
| $$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$ де аргумент $\varphi$ визначається із співвідношень $$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ |

**Пояснення й обґрунтування**

● Спочатку доведемо таке твердження: *якщо для чисел $m$ і $n$ виконується співвідношення $m^2+n^2=1$, то одне із цих чисел можна вважати синусом, а друге — косинусом деякого аргументу* $\varphi$.

Розглянемо точку *M* координатної площини з координатами $M(m;n)$. Координати точки *M* задовольняють рівнянню одиничного кола: $x^2+y^2=1$ (оскільки за умовою $m^2+n^2=1$). Отже, точка *M* знаходиться на одиничному колі, і її абсциса є косинусом кута $\varphi$, який утворює радіус *OM* з додатним напрямком осі *Ox*, а ордината — синусом цього кута $\varphi$. Тобто $m=\cos\varphi$, $n=\sin\varphi$.

Якщо взяти $m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то $m^2+n^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$.

Тоді для деякого кута $\varphi$ $m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$.

Тепер ми можемо довести формулу $a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)$.

Для цього доведемо, що права частина цієї формули дорівнює лівій.

$\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=$

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\alpha\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\alpha\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=a\sin\alpha+b\cos\alpha$, що й потрібно було довести.

Отже,

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi),$$

де аргумент $\varphi$ визначається із співвідношень: $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. ○

*Зауваження.* В одержаній формулі аргумент $\varphi$ визначають з точністю до $2\pi$, але найчастіше вибирають те значення, яке найменше за модулем.

Наприклад, для виразу $\sin\alpha+\cos\alpha$ маємо $a=1$, $b=1$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, аргумент $\varphi$ знаходиться в I чверті, тому як значення $\varphi$ можна вибрати $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right).$$

**Приклади розв'язання завдань**

**Приклад 1.** Знайдіть найбільше та найменше значення виразу $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

| *Розв'язання* | *Коментар* |
|---|---|
| ► За формулою $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ одержуємо $$\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$ Ураховуючи, що $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;1]$, маємо, що $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $[-2;2]$. Отже, найбільше значення заданого виразу дорівнює 2, а найменше — (–2). ◁ | Вираз $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$ можна перетворити за формулою $$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$ Тут $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, тоді $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4}=2$. Отже, $$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{1}{2}.$$ Тоді аргумент $\varphi$ знаходиться в IV чверті, і як значення $\varphi$ можна вибрати, наприклад, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. Також *слід ураховувати, що для того щоб знайти найбільше та найменше значення виразу, потрібно не тільки оцінити значення виразу* за допомогою нестрогих нерівностей $\left(-2\leqslant 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2\right)$, а й впевнитися, що знак рівності в цих нерівностях досягається. |

**Приклад 2.** Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)$.

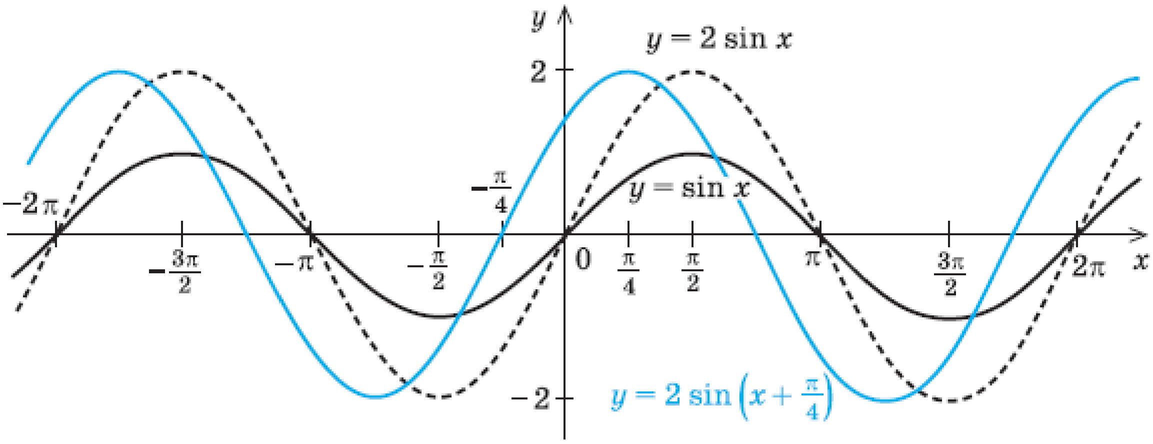
*Коментар*

Вираз $\sin x+\cos x$ можна записати у вигляді $\sin x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Тоді графік заданої функції можна побудувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y=\sin x$.

*Розв'язання*

► $y=\sqrt{2}\,(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Графік заданої функції одержуємо із графіка функції $y=\sin x$ (див. рисунок) розтягуванням у 2 рази вздовж осі $Oy$ і паралельним перенесенням отриманого графіка вздовж осі $Ox$ на $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. ◁




**Запитання для контролю**

1. Запишіть формулу перетворення виразу $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ на вираз вигляду $c\sin(x+\varphi)$. Проілюструйте на прикладі застосування цієї формули.

2. Обґрунтуйте формулу перетворення виразу $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ на вираз вигляду $c\sin(x+\varphi)$.

**Вправи**

1. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу:

1) $\sin\alpha + \cos\alpha$;

2) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$;

3) $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha$;

4) $\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{6}\cos\alpha$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$;

2) $y = \sin 2x - \cos 2x$;

3) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$;

4) $y = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$.

3. Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3\sin x + 4\cos x$;

2) $y = 5\sin 3x - 12\cos 3x$;

3) $y = \sin 7x - \cos 7x$;

4) $y = 8\sin\frac{x}{3} + 15\cos\frac{x}{3}$.

4. Чи існують такі значення *x*, при яких виконується рівність:

1) $3\sin x - 4\cos x = 6$;

2) $5\sin 2x + 12\cos 2x = 15$;

3) $\sqrt{3}\sin 4x - \cos 4x = \sqrt{5}$;

4) $\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 1{,}5$ ?