ВИРАЗИ

1. Загальні поняття

Математичні вирази поділяють на групи: числові вирази та вирази зі змінними.

Наприклад: $2\cdot 3{,}5-1$ — числовий вираз.

Значення числового виразу — число, яке дістанемо, якщо виконаємо всі дії в числовому виразі.

Числовий вираз **не має змісту**, якщо при знаходженні його значення приходять до дії, яку виконати не можна.

Наприклад: вираз $3:(2\cdot 3-6)+1$ не має змісту, бо $2\cdot 3-6=0$ і наступна дія $3:0$ не виконується.

Вираз зі змінними (буквений вираз) складається з букв (букви), чисел, знаків дій і дужок.

Виразом зі змінними також вважають окремо взяту букву.

Наприклад: abc; a; $3(a-b)+5a^2$; $\frac{5}{a+4}$ — вирази зі змінними.

Раціональні вирази

Цілі вирази

Можуть містити всі арифметичні дії та дію піднесення до степеня; не містять ділення на змінну і нуль	Можна подати у вигляді многочлена

Дробові вирази

Серед інших важливих арифметичних дій містять ділення на змінну (вираз зі змінними)	Можна подати у вигляді раціонального дробу

Раціональний дріб

Має вигляд $\frac{a}{b}$,

де a і b — многочлени

Допустимі значення змінних у виразі — це такі значення змінних (букв), при яких вираз має зміст. Допустимі значення змінних для раціонального дробу $\frac{a}{b}$ знаходять з умови $b \neq 0$.

Наприклад: для дробу $\frac{4a-5}{a^2-36}$ допустимими значеннями змінної є всі a, окрім тих, при яких $a^2-36=0$, тобто $a \neq \pm 6$.

Значенням виразу зі змінними (буквеного виразу) для заданих значень змінних (букв) називають значення числового виразу, що утворюється, якщо у вираз зі змінними підставити замість букв певні числа.

Наприклад: значення виразу $42(42-b)$, якщо $b=12$, дорівнює: $42\cdot(42-12)=42\cdot 30=1260$.

Тотожно рівними називають такі два вирази, які набувають відповідно рівних значень при будь-яких значеннях їхніх змінних.

Тотожність — рівність, яка справджується при всіх значеннях букв, при яких цей вираз має зміст.

2. Степені

Степені поділяють на такі групи.

1) Степінь з натуральним показником:

$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ множників}}$, $n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$, $a \in \boldsymbol{R}$.

$a^1 = a$; $0^n = 0$; $1^n = 1$, $n \in \boldsymbol{N}$.

2) Степінь з нульовим показником:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$; 0^0 не визначено.

3) Степінь з цілим від'ємним показником:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$; 0^{-n} не визначено.

Наприклад: $3^1 = 3$; $3^2 = 3\cdot 3 = 9$; $(-3)^2 = (-3)\cdot(-3) = 9$; $3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$, $(-3)^0 = 1$.

Властивості степенів

(у загальному випадку n, m — цілі; $a \neq 0$; $b \neq 0$)

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; $a^{m-n} = a^m : a^n$;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$; $a^{mn} = \left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$; $a^n b^n = (ab)^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$;

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$;

7) якщо $a < 0$, то $a^{2n} > 0$; $a^{2n+1} < 0$;

8) $(-a)^{2n} = a^{2n}$; $\quad (-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$.

3. Формули скороченого множення

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$;

6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

4. Стандартний вигляд числа

Стандартним виглядом числа називається запис числа у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Наприклад: $7500 = 7{,}5 \cdot 10^3$, де $a = 7{,}5$, $n = 3$.

Приклад. Виконати множення і записати в стандартному вигляді добуток.

$$\left(9{,}7 \cdot 10^5\right) \cdot \left(2{,}5 \cdot 10^{-8}\right) = (9{,}7 \cdot 2{,}5) \cdot \left(10^5 \cdot 10^{-8}\right) = 24{,}25 \cdot 10^{-3} = 2{,}425 \cdot 10^{-2}.$$

5. Квадратні корені

Квадратним коренем із дійсного числа *a* є таке число, квадрат якого дорівнює *a*.

Арифметичним квадратним коренем із невід'ємного числа *a* є таке невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*.

Наприклад: квадратним коренем із числа 9 є числа 3 і –3, бо $(-3)^2 = 9$ і $3^2 = 9$.

Арифметичним квадратним коренем із числа 9 є тільки число 3, бо $3 > 0$, $3^2 = 9$.

Арифметичний квадратний корінь із числа –9 не визначено.

Позначається як $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{-9}$ не існує.

Властивості арифметичного квадратного кореня

1) $\sqrt{0}=0$;

2) $\sqrt{1}=1$;

3) $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якщо $a\geqslant 0$;

4) $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a\geqslant 0, \\ -a, \text{ якщо } a<0; \end{cases}$

5) для $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$;

6) для $a\geqslant 0$, $b>0$: $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ і $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

7) винесення множника з-під знака кореня:
для $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$: $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$;

8) внесення множника під знака кореня:
для $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$: $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$.

6. Модуль числа та деякі його властивості

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a>0, \\ 0, \text{ якщо } a=0, \\ -a, \text{ якщо } a<0. \end{cases}$$

Деякі властивості модуля

1) $|a|\geqslant 0$ — модуль будь-якого числа є числом невід'ємним;

2) $|-a|=|a|$ — модулі протилежних чисел рівні;

3) $|a|^2=a^2$ — квадрат числа дорівнює квадрату його модуля.

7. Пропорції

Відношенням називають частку від ділення одного числа на інше.

Рівність двох відношень називають **пропорцією**.

Наприклад: $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ або $a:b=c:d$ — пропорція. У даному випадку a і b — це крайні члени пропорції, c і d — середні.

Властивості пропорції

1) $ad=bc$ — добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку її середніх членів;

2) $a=\dfrac{bc}{d}$; $b=\dfrac{ad}{c}$; $c=\dfrac{ad}{b}$; $d=\dfrac{bc}{a}$.

8. Дроби та дії з ними

Основна властивість раціонального дробу

Якщо $b \neq 0$ і $c \neq 0$, то справджуються рівності:

$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ — скорочення дробу;

$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ — розширення дробу (зведення дробу до нового знаменника).

- **Дії з раціональними дробами**

1) Додавання та віднімання дробів.

— Додавання і віднімання дробів з *однаковими знаменниками*:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

— При додаванні (відніманні) раціональних дробів із *протилежними знаменниками* спочатку використовують правило знаків:

$$\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b} = -\frac{-a}{b} = \frac{-a}{-b} \quad (b \neq 0),$$

а потім виконують додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

— Дроби з *різними знаменниками* спочатку зводять до спільного знаменника, а потім знаходять їхню суму або різницю за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

2) Множення дробів та піднесення дробу до степеня.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, де $b \neq 0$, $d \neq 0$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, де $b \neq 0$.

3) Ділення дробів.

Щоб поділити дроби, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, де $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

РІВНЯННЯ, СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

1. Загальні поняття

Рівність зі змінною називається **рівнянням**.

Коренем (розв'язком) рівняння з однією змінною називають значення змінної, яке перетворює рівняння на правильну числову рівність.

Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.

Два рівняння називають **рівносильними**, якщо вони мають ті самі (однакові) корені (тобто кожний корінь першого рівняння є коренем другого і навпаки). Рівносильними також називають рівняння, що не мають коренів.

Основні властивості (рівносильних) рівнянь

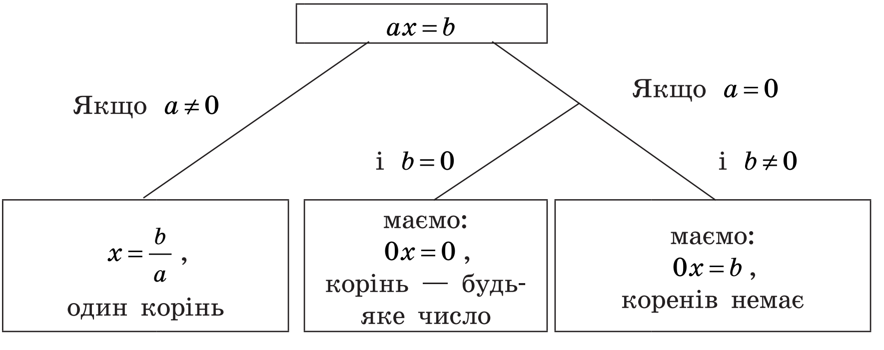
1) Якщо виконати тотожні перетворення деякої частини рівняння (розкрити дужки, звести подібні доданки), то одержимо рівняння, рівносильне даному.
2) Якщо деякий доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному.
3) Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

2. Лінійне рівняння з однією змінною

Лінійне рівняння з однією змінною — це рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі числа (коефіцієнти), x — невідоме.

Наприклад: $3x = 2$; $0x = 5$; $0x = 0$ — лінійні рівняння з однією змінною.

Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною залежить від його коефіцієнтів (див. схему).



3. Рівняння з модулем

Рівняння з модулем розв'язуються за такою схемою.

$|x| = a$
(a — число)

Якщо $a < 0$	Якщо $a = 0$	Якщо $a > 0$
коренів немає	$x = 0$, один корінь	$x = a$ або $x = -a$, два корені

4. Рівняння виду $x^2 = a$ (де a — деяке число)

1) Якщо $a < 0$, то рівняння дійсних коренів не має.
2) Якщо $a = 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = 0$.
3) Якщо $a > 0$, то рівняння має два дійсні корені
   $x = \sqrt{a}$ і $x = -\sqrt{a}$.

   Наприклад:

   1) $3x^2 - 27 = 0$; $3x^2 = 27$; $x^2 = 9$; $x = 3$; $x = -3$;
   2) $x^2 + 5 = 0$; $x^2 = -5$, дійсних коренів немає;
   3) $x^2 = 0$; $x = 0$.

5. Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — деякі числа, $a \neq 0$.

- **Неповні квадратні рівняння**

1) Якщо $b = 0$, $c = 0$, то $ax^2 = 0$; $x = 0$.
2) Якщо $b = 0$, $c \neq 0$, то $ax^2 + c = 0$; $ax^2 = -c$; $x^2 = -\dfrac{c}{a}$; якщо $-\dfrac{c}{a} > 0$, то $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$.
3) Якщо $c = 0$, $b \neq 0$, то $ax^2 + bx = 0$; $x(ax + b) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

- **Квадратне рівняння загального вигляду**

$ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

$D = b^2 - 4ac$ — **дискримінант рівняння.**

1) Якщо $D > 0$, то рівняння має два різні дійсні корені: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2) Якщо $D=0$, то рівняння має два рівні дійсні корені (іноді говорять, що рівняння має один корінь): $x=-\frac{b}{2a}$.

3) Якщо $D<0$, то рівняння не має дійсних коренів.

Для розв'язання квадратного рівняння $ax^2+2kx+c=0$ ($b=2k$, $k\in \boldsymbol{Z}$) використаємо формулу $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-ac}}{a}$, де $k^2-ac=\frac{D}{4}$, $k=\frac{b}{2}$.

Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння: якщо x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2+px+q=0$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$

Розкладання на множники квадратного тричлена

Квадратний тричлен ax^2+bx+c можна подати у вигляді $a(x-x_1)(x-x_2)$, якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена, тобто якщо x_1 і x_2 є коренями рівняння $ax^2+bx+c=0$.

6. Рівняння, що зводяться до квадратних

- **Біквадратні рівняння**

Біквадратними називаються рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4-10x^2+9=0$.

Розв'язання: нехай $x^2=y$, тоді $x^4=y^2$. Отримаємо: $y^2-10y+9=0$; $y_1=9$; $y_2=1$.

Виконавши обернену заміну, отримаємо:

а) $x^2=9$; $x_1=3$; $x_2=-3$;

б) $x^2=1$; $x_1=1$; $x_2=-1$.

Відповідь: –3; –1; 1; 3.

- **Дробові раціональні рівняння**

Дробовими раціональними називають рівняння, у яких хоча б одна частина є дробовим виразом.

Наприклад: рівняння $\frac{6x}{x-9}=4$ і $\frac{7}{x+7}=\frac{5}{x+1}$ — дробові раціональні.

Одним зі способів розв'язування дробових раціональних рівнянь є заміна дробового рівняння на рівносильне рівняння виду $\frac{a}{b}=0$ та використовування умови рівності дробу нулю (дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює нулю, коли його чисельник дорівнює нулю: $a=0$, а знаменник не дорівнює нулю: $b\neq 0$).

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x-5}=\frac{x-2}{x-6}$.

Розв'язання:

$$\frac{x}{x-5}-\frac{x-2}{x-6}=0;\quad \frac{x^2-6x-x^2+5x+2x-10}{(x-5)(x-6)}=0;\quad \frac{x-10}{(x-5)(x-6)}=0.$$

Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Отже, $x-10=0$; $x=10$. Якщо $x=10$, то знаменник дробу $(x-5)(x-6)=(10-5)(10-6)=$ $=20\neq 0$.

Відповідь: 10.

Для рівнянь виду $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ можливе застосування основної властивості пропорції з урахуванням того, що $b\neq 0$; $d\neq 0$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{y-2}{y-6}=\frac{y}{y-5}$.

Розв'язання:

За властивістю пропорції маємо $(y-2)(y-5)=y(y-6)$, якщо $y\neq 6$ і $y\neq 5$. Отже, $y^2-2y-5y+10=y^2-6y$; $-y=-10$; $y=10$.

Відповідь: 10.

7. Лінійні рівняння з двома змінними

Лінійне рівняння з двома змінними — це рівняння виду $ax+by=c$, де x, y — змінні, a, b, c — числа (коефіцієнти) рівняння.

Наприклад: $x+y=8$; $0x+4y=2$; $-x+0y=0$ — лінійні рівняння з двома змінними.

Розв'язком рівняння з двома змінними називається пара значень змінних, при яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Наприклад: лінійне рівняння $x+y=8$ має пари розв'язків: $x=4$, $y=4$; $x=4{,}5$, $y=3{,}5$.

8. Системи рівнянь з двома змінними

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють **систему рівнянь.**

Розв'язком системи рівнянь із двома змінними називається впорядкована пара значень невідомих, при яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Основними способами розв'язування систем (лінійних) рівнянь з двома змінними є:

а) підстановка; б) додавання; в) графічний.

При розв'язуванні систем (лінійних) рівнянь ***способом підстановки*** потрібно:

1) виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через іншу;
2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної одержаний вираз;
3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Приклад 1. Розв'язати способом підстановки систему рівнянь:

$$\begin{cases}2x+y=3,\\3x-2y=8;\end{cases}\quad \begin{cases}y=3-2x,\\3x-2\cdot(3-2x)=8;\end{cases}\quad \begin{cases}y=3-2x,\\3x-6+4x=8;\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=3-2x,\\7x=14;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\y=3-2\cdot 2;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$$

Відповідь: $(2;-1)$.

Приклад 2. Розв'язати способом підстановки систему рівнянь $\begin{cases}x-y=3,\\xy=-2.\end{cases}$

Розв'язання: $\begin{cases}x=3+y,\\xy=-2;\end{cases}$ $(3+y)y=-2$; $y^2+3y+2=0$; $y_1=-2$; $y_2=-1$; $x_1=1$; $x_2=2$.

Відповідь: $(1;-2)$, $(2;-1)$.

При розв'язуванні систем (лінійних) рівнянь ***способом додавання*** потрібно:

1) помножити обидві частини одного або двох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами;
2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь;
3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Приклад. Розв'язати способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases}3x+5y=9,\\6x+2y=-6.\end{cases}$$

1) Помножимо обидві частини першого рівняння на –2.

   Дістанемо систему $\begin{cases}-6x-10y=-18,\\6x+2y=-6.\end{cases}$

2) Додавши почленно рівняння одержаної системи, матимемо рівняння $-8y=-24$, з якого дістаємо $y=3$.

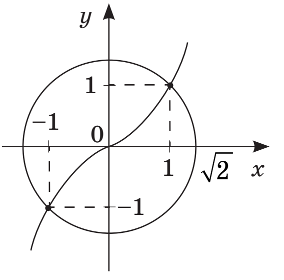
3) Підставимо в друге рівняння даної системи замість y число 3 і розв'яжемо одержане рівняння:

$6x+6=-6$; $6x=-12$; $x=-2$.

Відповідь: $(-2;3)$.

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь з двома змінними можна проілюструвати таким прикладом.

Приклад. Розв'язати графічно систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ x^3-y=0. \end{cases}$



Розв'язання: будуємо графіки рівнянь системи (див. рисунок); координати точок перетину цих графіків є розв'язками системи.

$x^2+y^2=2$ — коло, де $R=\sqrt{2}$,

$x^3-y=0$, $y=x^3$ — кубічна парабола.

Відповідь: $(-1;-1)$, $(1;1)$.

НЕРІВНОСТІ

Нерівності поділяють на строгі і нестрогі.

$a>b$, $a<b$ — **строгі нерівності;**

$a\geqslant b$, $a\leqslant b$ — **нестрогі нерівності.**

1. Властивості числових нерівностей

1) Якщо $a>b$, то $b<a$.
2) Якщо $a>b$, $b>c$, то $a>c$.
3) Якщо $a>b$, то $a+c>b+c$.
4) Якщо $a>b$ і $c>d$, то $a+c>b+d$.
5) Якщо $a>b$ і $c>0$, то $ac>bc$ і $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.
6) Якщо $a>b$ і $c<0$, то $ac<bc$ і $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.
7) Якщо $a>b$ ($a>0$, $b\geqslant 0$), то $a^{2n}>b^{2n}$.
8) Якщо $a>b$ ($a>0$, $b>0$), то $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.
9) Якщо $a>b$ ($a>0$, $b>0$), то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

2. Розв'язування лінійних нерівностей з однією змінною та їх систем

Приклад 1. Розв'язати нерівність $7-2(x-3)>3x$.

Розв'язання: $7-2x+6>3x$, $-5x>-13$; $x<2{,}6$.

Відповідь: $(-\infty;2{,}6)$.

Приклад 2. Розв'язати систему нерівностей:

а) $\begin{cases}2-2x<9,\\3x+1<-10;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x<4-4x,\\-5x>-25.\end{cases}$

Розв'язання:

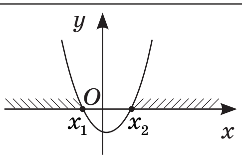
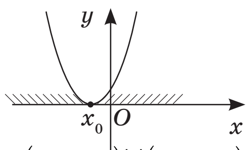
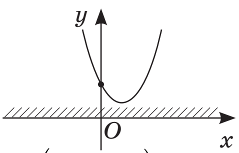
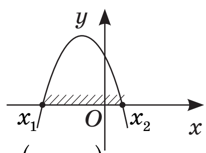
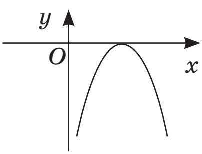
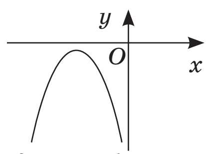
а) $\begin{cases}-2x<7,\\3x<-11;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-3{,}5,\\x<-3\dfrac{2}{3}.\end{cases}$ *Відповідь*: розв'язків немає.

б) $\begin{cases}6x<4,\\5x<25;\end{cases}$ $\begin{cases}x<\dfrac{2}{3},\\x<5.\end{cases}$ *Відповідь*: $\left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

3. Квадратні нерівності

Нерівність виду $ax^2+bx+c>0$ (<0; $\geqslant 0$; $\leqslant 0$) називається **квадратною**, якщо $a\neq 0$.

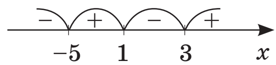
Випадки розв'язання квадратних нерівностей (залежно від знака числа *a* та значення дискримінанта *D*) наведено в таблиці.

$a>0$ $D>0$  *Відповідь*: $(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$.	$a>0$ $D=0$  *Відповідь*: $(-\infty;x_0)\cup(x_0;+\infty)$.
$a>0$ $D<0$  *Відповідь*: $(-\infty;+\infty)$.	$a<0$ $D>0$  *Відповідь*: $(x_1;x_2)$.
$a<0$ $D=0$  *Відповідь*: розв'язків немає.	$a<0$ $D<0$  *Відповідь*: розв'язків немає.

4. Розв'язування нерівностей методом інтервалів

Приклад 1. Розв'язати нерівність $(x+5)(x+1)(x-3)<0$.

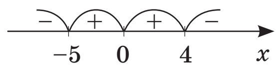
Розв'язання: нулі функції $x=-5$; $x=-1$; $x=3$.



Відповідь: $(-\infty;-5)\cup(-1;3)$.

Приклад 2. Знайти область визначення функції
$y=\sqrt{(4-x)(x+5)x^2}$.

Розв'язання: $(4-x)(x+5)x^2\geqslant 0$; $x^2\geqslant 0$; $(4-x)(x+5)\geqslant 0$. Нулі функції: $x=0$; $x=4$; $x=-5$.



Відповідь: $[-5;4]$.

ФУНКЦІЇ І ГРАФІКИ

1. Загальні поняття

Залежність змінної *y* від змінної *x* називається **функцією**, якщо кожному значенню *x* відповідає єдине значення *y*.

При цьому *x* називають **аргументом** (незалежною змінною), *y* — **функцією** (залежною змінною).

Область визначення функції утворена всіма значеннями, яких може набувати аргумент (змінна *x*).

Область значень функції утворена всіма значеннями, яких може набувати функція (змінна *y*) при всіх *x* з області визначення функції.

Графік функції утворений усіма точками координатної площини з координатами $(x;y)$, де *x* «пробігає» всю область визначення функції, а *y* набуває відповідного значення з області значень функції.

2. Основні види елементарних функцій, їх властивості й графіки

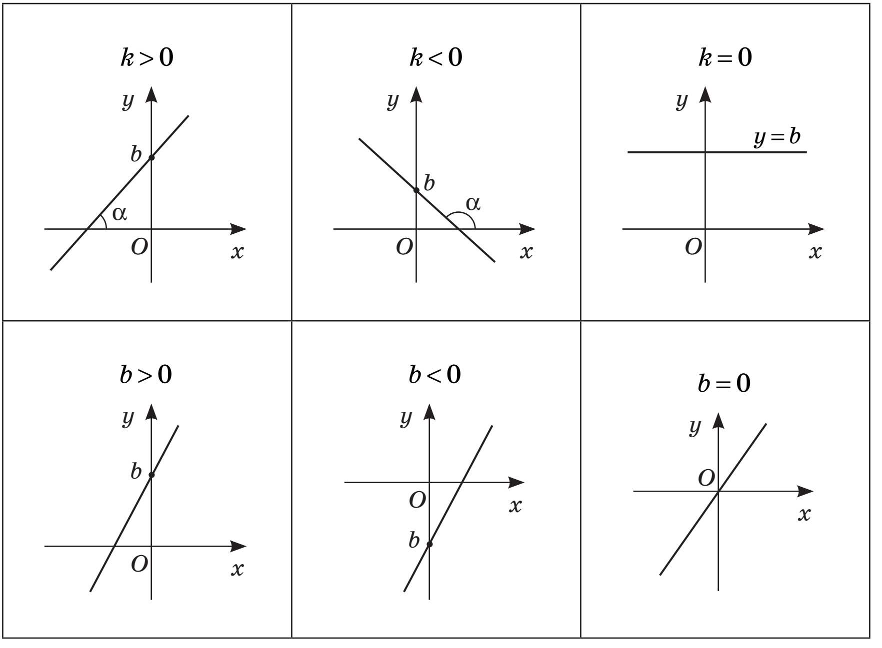
- **Лінійна функція**

Лінійною називається функція виду $y=kx+b$, де k і b — деякі числа.

Наприклад: а) $y=3x-2$ — лінійна функція, де $k=3$, $b=-2$; б) $y=3x$ — лінійна функція, де $k=3$, $b=0$; в) $y=-2$ — лінійна функція, де $k=0$, $b=-2$.

Графіком лінійної функції є ***пряма.***

Положення графіка лінійної функції $y = kx + b$ у системі координат залежить від коефіцієнтів k і b (див. рисунки).



Розглянемо ***взаємне розташування графіків*** двох лінійних функцій.

Нехай задано дві лінійні функції $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ та їхні графіки — прямі m_1 і m_2 відповідно. Тоді:

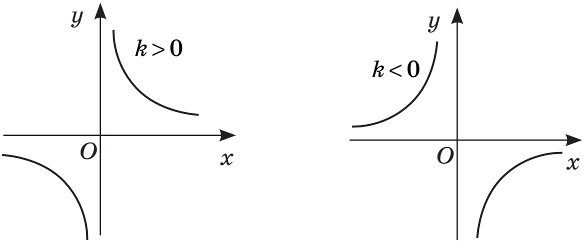
1) $m_1 \parallel m_2$, якщо $k_1 = k_2$, $b_1 \neq b_2$;

2) m_1 і m_2 перетинаються в одній точці, якщо $k_1 \neq k_2$.

- **Функція** $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$

Оберненою пропорційністю називають функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, де $x \neq 0$, k — деяке число, що не дорівнює 0.

Графік функції $y = \frac{k}{x}$ називається ***гіперболою***, вона складається з двох частин (віток) і симетрична відносно початку координат. Якщо $k > 0$, то графік функції розміщений у I і III координатних чвертях, якщо $k < 0$, то — у II і IV координатних чвертях (див. рисунки на с. 16).



Область визначення функції — множина всіх дійсних чисел, окрім $x = 0$.

Область значень функції — множина всіх дійсних чисел, окрім $y = 0$.

• Квадратична функція

Квадратичною називається функція, що має вигляд $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$. Графік цієї функції — ***парабола***, вітки якої напрямлені вгору (якщо $a > 0$) або вниз (якщо $a < 0$). Координати вершини параболи: $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = -\frac{D}{4a}$; $D = b^2 - 4ac$.

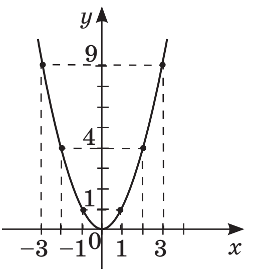
Графік функції $y = ax^2 + bx + c$ утворений із графіка $y = x^2$ шляхом геометричних перетворень.

• Функція $y = x^2$

Область визначення функції — множина всіх дійсних чисел.

Область значень функції — множина всіх невід'ємних чисел $y \geqslant 0$.

Графік функції — ***парабола*** (див. рисунок). Точка $(0;0)$ — ***вершина параболи***, що симетрична відносно осі *Oy*.

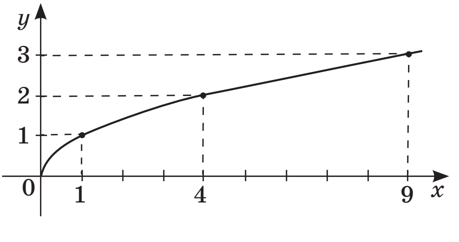


• Функція $y = \sqrt{x}$

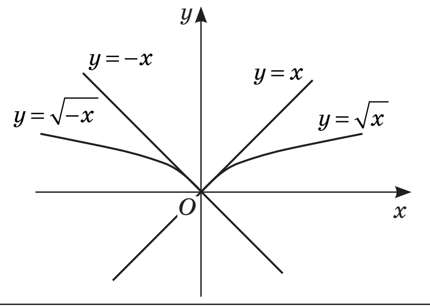
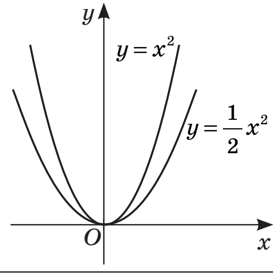
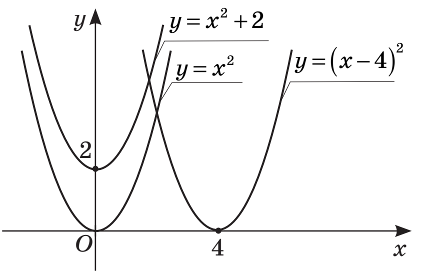
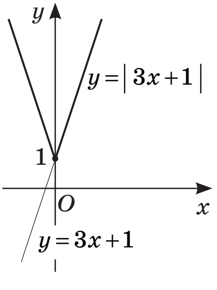
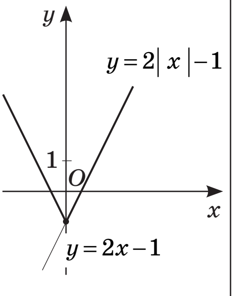
Область визначення — множина невід'ємних чисел $(x \geqslant 0)$.

Область значень — множина невід'ємних чисел $(y \geqslant 0)$.

Графік функції зображено на рисунку.



3. Перетворення графіків функцій

Графіки функцій $y=f(x)$ і $y=-f(x)$ є симетричними відносно осі Ox; $y=f(x)$ і $y=f(-x)$ — відносно осі Oy	
Графік функції $y=kf(x)$ $(k>0)$ має той самий вигляд, що й графік функції $y=f(x)$, тільки розтягнений $(k>1)$ або стиснений $(0<k<1)$ уздовж осі Ox	
Графік функції $y=f(x-a)$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ шляхом його паралельного перенесення вздовж осі Ox на a одиниць; функції $y=f(x)+b$ — з графіка функції $y=f(x)$ шляхом його паралельного перенесення вздовж осі Oy на b одиниць	
Графік функції $y=\lvert f(x)\rvert$ одержується з графіка функції $y=f(x)$ шляхом симетрії відносно осі Ox його частини, розташованої нижче від осі Ox; функції $y=f(\lvert x\rvert)$ — з графіка функції $y=f(x)$ шляхом симетрії відносно осі Oy його частини, розташованої праворуч від осі Oy	 

ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

1. Арифметична прогресія

Арифметичною прогресією називається числова послідовність, у якій кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, *доданому* до того самого числа. *Наприклад*: 3; 6; 9; 12; ... .

Якщо (a_n): $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ — арифметична прогресія, то

$d = a_n - a_{n-1}$ — різниця арифметичної прогресії;

$a_n = a_{n-1} + d(n-1)$ — n-й член арифметичної прогресії.

$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$; $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$ — сума n перших членів арифметичної прогресії.

Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному попереднього і наступного членів: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

2. Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називається числова послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на те саме число. *Наприклад*: 2; 6; 18; 54; ... .

Якщо (b_n): $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n$ — геометрична прогресія, то

$q = \frac{b_n}{b_{n-1}}$ — знаменник геометричної прогресії;

$b_n = b_1 q^{n-1}$ — n-й член геометричної прогресії.

$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1}$; $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$ — сума n перших членів геометричної прогресії.

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку попереднього й наступного членів:

$$b_n{}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} .$$

Якщо $|q| < 1$, то $S = \frac{b_1}{1-q}$ (*сума нескінченної геометричної прогресії*).