6 Геометрична прогресія має цікаві властивості. Спробуйте довести їх самостійно.

1) Якщо послідовність b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... є геометричною прогресією зі знаменником q, то послідовність квадратів її членів b_1^2, b_2^2, b_3^2, ..., b_n^2, ... є геометричною прогресією зі знаменником q^2.

2) Добуток двох членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від крайніх членів, дорівнює добутку крайніх членів:

$$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = b_4 \cdot b_{n-3} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}.$$

Доведення

1) Якщо послідовність b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... є геометричною прогресією зі знаменником q, то можемо записати формулу її n-го члена: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Маємо: $b_2 = b_1 \cdot q$, а $(b_2)^2 = (b_1)^2 \cdot q^2$;

$b_3 = b_1 \cdot q^2$, а $(b_3)^2 = (b_1)^2 \cdot q^4$; ...,

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, а $(b_n)^2 = (b_1)^2 \cdot q^{2(n-1)}$.

Тоді $\frac{b_2^2}{b_1^2} = \frac{(b_1)^2 \cdot q^2}{(b_1)^2} = q^2$; $\frac{b_3^2}{b_2^2} = \frac{(b_1)^2 \cdot q^4}{(b_1)^2 \cdot q^2} = q^2$; ...; $\frac{b_n^2}{b_{n-1}^2} = \frac{(b_1)^2 \cdot q^{2(n-1)}}{(b_1)^2 \cdot q^{2(n-2)}} = q^2$.

Отже, послідовність b_1^2, b_2^2, b_3^2, ..., b_n^2, ... є геометричною прогресією зі знаменником q^2 за означенням.

2) Скористаємося формулою n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Маємо: $b_1 \cdot b_n = b_1 \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$;

$b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 \cdot q \cdot b_1 \cdot q^{n-1-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$;

$b_3 \cdot b_{n-2} = b_1 \cdot q^2 \cdot b_1 \cdot q^{n-2-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$; ...,

$b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-k+1-1} = b_1^2 \cdot q^{n-1}$.

Отже, $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = b_3 \cdot b_{n-2} = b_4 \cdot b_{n-3} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k+1}$.