До доведення існування чисел, які не є раціональними (ірраціональних чисел)

Теорема 1. Не існує такого раціонального дробу $\frac{p}{q}$ (де p і q — натуральні числа), квадрат якого був би рівний 2.

Доведення
(методом від супротивного)

Нехай існує такий дріб $\frac{p}{q}$, що $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Вважатимемо, що дріб $\frac{p}{q}$ нескоротний, тобто p і q не мають спільних множників. Оскільки $p^2 = 2q^2$, маємо, що p^2 — парне число, тоді й p — парне число. Тобто його можна записати у вигляді $p = 2k$ (де k—ціле число). Тому число q не може бути парним (бо тоді дріб $\frac{p}{q}$ можна було б скоротити на 2, тобто початковий дріб $\frac{p}{q}$ був би скоротним). Отже q — непарне число. Підставивши у рівняння $p^2 = 2q^2$ замість p вираз $2k$, одержимо: $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2k)^2}{2} = \frac{4k^2}{2} = 2k^2$. Звідси маємо, що q — парне число, що суперечить нашому припущенню.

Теорему доведено.

Теорема 2. Сторона квадрата несумірна з його діагоналлю.

Говорять, що два відрізки **сумірні**, якщо вони мають спільну міру, тобто існує відрізок, який вкладається ціле число разів у кожному з них.

Доведення

Нехай сторона квадрата дорівнює 1. Припустимо, що довжина діагоналі такого квадрата визначається раціональним числом виду $\frac{p}{q}$, де p і q — натуральні числа. Дріб $\frac{p}{q}$ вважатимемо нескоротним. Тоді згідно з теоремою Піфагора одержимо: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, або $p^2 = 2q^2$. Звідси аналогічно попередній теоремі доводимо, що довжина діагоналі квадрата, сторона якого дорівнює 1, не виражається раціональним числом. У цьому випадку кажуть, що діагональ квадрата є несумірною з його стороною.

Теорему доведено.